МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Рубцовский индустриальный институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
"Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова"(РИИ АлтГТУ)

Е.В. Никитенко, И.А. Айрих

СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Учебное пособие для студентов
направления "Информатика и вычислительная техника"

Рубцовск 2016

УДК 681.5

Никитенко Е.В., Айрих И.А. Системы автоматического регулирования: Учебное пособие для студентов направления "Информатика и вычислительная техника". - Изд. 2-е. / Рубцовский индустриальный институт.- Рубцовск, 2016. - 73 с.

Учебное пособие посвящено изложению основ теории автоматического управления. Подробно представлена теория линейных непрерывных систем управления.

Рассмотрено и одобрено на
заседании кафедры ПМ Рубцовского
индустриального института.
Протокол №5 от 20.01.2016 г.

Рецензент: декан технич. фак., к.т.н., доцент А.В. Шашок

Содержание

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. **Исходные понятия**

Под *управлением* в технике понимают целенаправленное воздействие на какое-либо устройство, объект. Устройство (машина, агрегат, технологический процесс), состоянием которого можно и нужно управлять, называется *объектом управления* (ОУ). *Объект управления* может принадлежать как к неживой природе (например, самолет), так и к живой природе (коллектив людей). В свою очередь, само управление также может осуществляться как человеком (пилот управляет самолетом), так и техническим устройством (самолетом управляет автопилот). Объект управления с взаимодействующим с ним управляющим устройством называется *системой управления.*

Если система управления функционирует с участием человека, то она называется *автоматизированной системой управления* (АСУ). Система управления, функционирующая без участия человека, называется *системой автоматического управления* (САУ).

Основной задачей автоматического управления является поддержание определенного закона изменения одной или нескольких физических величин, характеризующих процессы, протекающие в ОУ, без непосредственного участия человека. Эти величины называются *управляемыми величинами.*

Блок-схему системы (автоматического) управления в общем случае можно представить так, как на рис. 1.

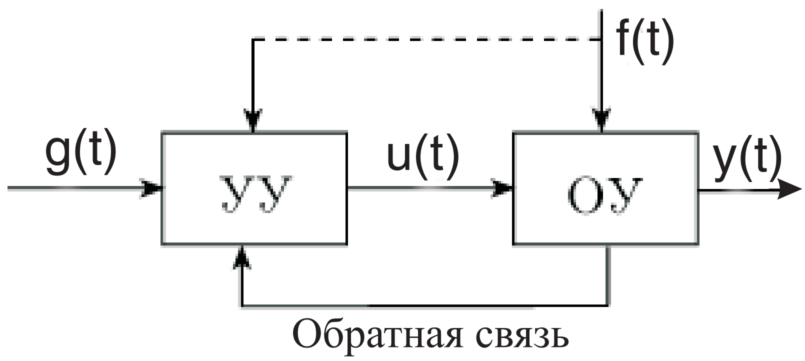


Рис. 1. Общая блок-схема САР

ОУ – объект управления;

УУ – управляющее устройство;

$\mathbf{y}(\mathbf{t})$ – выходная переменная ОУ (переменная системы управления);

$\mathbf{g}(\mathbf{t})$ – *задающее воздействие*, которое определяет требуемый (заданный) закон изменения выходной переменной;

$\mathbf{u}(\mathbf{t})$ – *управляющее воздействие*, входная переменная ОУ;

$\mathbf{f}(\mathbf{t})$ – *возмущающее воздействие* (возмущение), действующее на ОУ, приводит к отклонению управляемой переменной от требуемого значения.

Обратной связью называется канал связи, по которому информация о выходной величине поступает в управляющее устройство (УУ). В зависимости от принципа управления обратная связь может отсутствовать.

Системой автоматического регулирования называется система управления с обратной связью. При этом ОУ – объект регулирования, УУ – регулятор.

Принцип действия всякой системы автоматического регулирования (САР) заключается в том, чтобы обнаруживать отклонения регулируемых величин, характеризующих работу объекта или протекание процесса, от требуемого режима и при этом воздействовать на объект или процесс так, чтобы устранять эти отклонения.

В зависимости от реакции на входные воздействия объекты управления делятся на:

- устойчивые;
- нейтральные;
- неустойчивые.

Допустим, что при входных воздействиях $u = u_0$ и $f = f_0$ выходная переменная $y = y_0$. И пусть на какое-то время хотя бы одно из входных воздействий изменяется,

$$u = u_0 + \Delta u \text{ или } f = f_0 + \Delta f,$$

а затем принимает первоначальное значение $\Delta u = 0$ и $\Delta f = 0$ при $t > t_0 + T$. Если при этом выходная переменная со временем принимает первоначальное значение: $y(t) \to y_0$ при $t \to \infty$, объект управления называется *устойчивым*;

если переменная принимает новое постоянное значение $y(t) \to y_* \neq y_0$ при $t \to \infty$, объект управления называется *нейтральным*;

если переменная не стремится к первоначальному или новому постоянному значению, объект называется *неустойчивым.*

1.2. **Принципы управления**

Рассмотрим основные принципы управления, которые используются в настоящее время при разработке систем управления.

Принцип программного управления. Если об объекте управления все известно, то, точно зная, как зависит выходная переменная объекта управления от управляющего воздействия, управление можно формировать как известную функцию времени $u = u(t)$. Такой способ организации управления можно назвать *принципом программного управления.* При таком принципе управления УУ можно представить как устройство, состоящее из программатора (программирующего устройства) и исполнительного устройства (ИУ), рис. 2.

В частном случае исполнительное устройство может отсутствовать. Принцип программного управления неприменим:

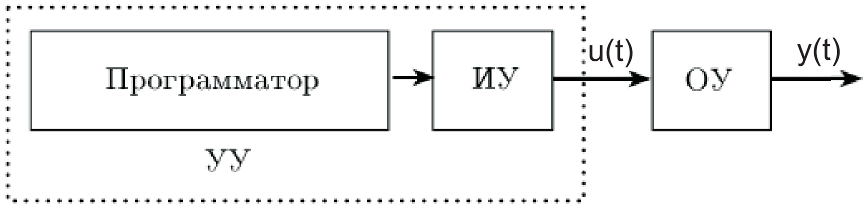


Рис. 2. Система программного управления

• при управлении объектом, на который действуют заранее не известные возмущения, оказывающие существенное влияние на управляемую величину;

• если объект управления является нейтральным или неустойчивым и система управления должна функционировать достаточно длительное время. Это связано с тем, что при нейтральном и неустойчивом объекте управления небольшая систематическая ошибка в программном управлении приводит к нарастающей ошибке управляемой переменной.

Принцип компенсации. Основной причиной, обуславливающей использование специальных УУ, содержащих, помимо программатора и ИУ, измерительные и усилительно-преобразующие устройства, является действие на систему управления возмущений, оказывающих существенное влияние на ее работу.

Способ управления, при котором управляющее воздействие вырабатывается на основе действующих возмущений, называется *способом управления по возмущению или принципом компенсации.*

Достоинством данного способа является принципиальная возможность полной компенсации возмущающего воздействия.

Недостатком метода компенсации является то, что он не всегда применим. Его нельзя применять:

• если возмущение нельзя измерить (из-за того, что его существование не известно или по другой причине);

• если на систему действует много различных возмущений, так как в этом случае УУ получается сложным;

• если объект управления является нейтральным или неустойчивым.

Принцип обратной связи. *Управлением по отклонению* называется такой способ управления, при котором определяется отклонение текущего значения выходной переменной от требуемого значения и на его основе формируется управляющее воздействие.

Системы управления, основанные на способе управления по отклонению, содержат обратную связь — канал связи, по которому информация об управляемой переменной поступает на управляющее устройство. Поэтому способ управления по отклонению также называют *принципом обратной связи.*

Достоинством принципа обратной связи является его универсальность, возможность его использования в условиях отсутствия информации о возмущающих воздействиях. Принцип обратной связи широко используется в технике, а также присущ живым организмам и обществу.

Недостатком способа управления по отклонению является принципиальная невозможность полной компенсации возмущающих воздействий. Это связано с тем, что при этом способе управления управляющее воздействие начинает вырабатываться и оказывать влияние на ход процесса управления только после того, как возмущение, начав действовать, вызывает отклонение управляемой величины от требуемого режима.

Принцип комбинированного управления. Принцип комбинированного управления используется в тех случаях, когда на систему действует много различных возмущений, один (или несколько) из которых оказывает наибольшее влияние на работу системы управления и может быть измерен. В подобных случаях влияние превалирующего возмущения можно нейтрализовать, используя принцип компенсации, а влияние остальных возмущений нейтрализовать, используя принцип обратной связи.

1.3. Структура системы управления

Изучение и математический анализ САУ существенно облегчаются, если ее предварительно мысленно расчленить на типовые элементы, выявить физические взаимосвязи между ними и отобразить эти взаимосвязи схематично в какой-либо условной форме. САУ может быть разделена на части по различным признакам: назначению частей, алгоритмам преобразования информации, конструктивной обособленности.

В технике различают следующие структуры и структурные схемы САУ:

- функциональную;
- алгоритмическую;
- конструктивную.

При этом будем понимать, что: структура - совокупность связанных между собой частей чего-либо целого; структурная схема - графическое изображение структуры.

В теории автоматического управления чаще всего имеют дело с функциональной и алгоритмической структурами (схемами). Поэтому рассмотрим их более подробно. Функциональные и алгоритмические схемы состоят из условных изображений элементов и звеньев (обычно в виде прямоугольников) и различных связей, изображаемых в виде линий со стрелками, показывающих направление передачи воздействий. Каждая линия соответствует обычно одному сигналу или одному воздействию. Около каждой линии указывают физическую величину, характеризующую данное воздействие. Обычно вначале составляют функциональную схему САУ, а затем - алгоритмическую. Алгоритмические схемы могут составляться с большей или меньшей степенью детализации. Схемы, на которых показаны лишь главные или укрупненные части САУ, называются обобщенными (см. рис. 1).

Функциональная структура (схема) - структура(схема), отражающая функции (целевые назначения) отдельных частей САУ.

Алгоритмическая структура (схема) - структура (схема), представляющая собой совокупность взаимосвязанных алгоритмических звеньев и характеризующая алгоритмы преобразования информации в САУ. При этом алгоритмическое звено - часть алгоритмической структуры САУ, соответствующая определенному математическому алгоритму преобразования сигнала.

Алгоритмическая схема может походить на функциональную. Но иногда для упрощения математических преобразований при исследовании ее видоизменяют, и внешнее сходство с функциональной схемой утрачивается. Часто в теории автоматического управления алгоритмическую схему называют просто структурной схемой. Мы также не будем делать различия между этими понятиями.

Конструктивная схема - схема, отражающая конкретное схемное, конструктивное и прочее исполнение САУ. К конструктивным схемам относятся: кинематические схемы устройств, принципиальные и монтажные схемы электрические соединений и т. д. Так как в САУ мы имеем дело с математическими моделями, то конструктивные схемы нас интересуют в значительно меньшей степени, чем функциональные и структурные.

На рис. 3 приведен пример функциональной схемы САУ.

Управляющее устройство, построенное на основе принципа компенсации (рис. 3, *а*), включает следующие функциональные устройства: ЗУ – задающее устройство, которое вырабатывает задающее воздействие; ЧЭ – чувствительный элемент, предназначенный для измерения возмущения; УПУ – усилительно-преобразовательное устройство, которое на основе задающего воздействия и измеренных значений возмущения вырабатывает управляющее воздействие; ИУ – исполнительное устройство, которое непосредственно воздействует на объект управления.

Управляющее устройство системы управления по отклонению (рис. 3, *б* без штриховой линии), помимо задающего устройства, усилительно-преобразующего устройства и исполнительного устройства, содержит сравнивающее устройство (СУ), которое определяет ошибку , равную или пропорциональную отклонению управляемой переменной от требуемого значения, и чувствительный элемент (ЧЭ), предназначенный для измерения управляемой переменной.

Управляющее устройство системы комбинированного управления (рис. 3,*б* со штриховой линией) по сравнению с управляющим устройством системы управления по отклонению включает дополнительно чувствительный элемент, предназначенный для измерения возмущения.

Чувствительные элементы или, как их еще называют, датчики служат для измерения различных физических величин: перемещения, угла поворота,

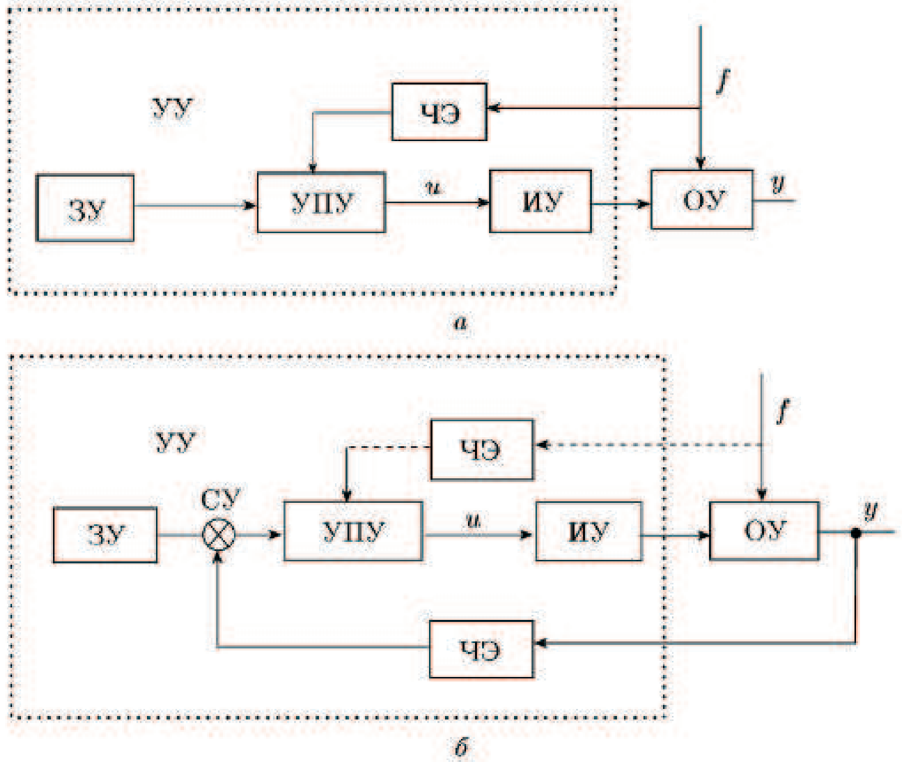


Рис. 3. Функциональная схема системы управления: а–по возмущению; б–с обратной связью

температуры, напряжения, давления и т.д. Это могут быть: потенциометры, тахогенераторы (датчики угловой скорости), датчики температуры, терморезисторы и т.д.

Многие датчики одновременно являются и преобразователями: они преобразуют величины одной физической природы в другие. Например, потенциометрические датчики преобразуют механическую величину (перемещение, поворот) в электрическую; термопара — термодинамическую величину в электрическую.

Выходные сигналы датчиков являются слабыми. Поэтому их обычно усиливают, используя различные типы усилителей: электрические (электронные, магнитные, электромашинные), гидравлические и пневматические.

Математическая модель электронных ненагруженных усилителей при изменении входного напряжения в определенном диапазоне представляет пропорциональное звено. Нагружая и охватывая его отрицательной обратной связью из различных схем, можно получить звено с передаточными функциями, необходимыми для формирования того или иного закона управления. Звенья, предназначенные для получения нужного закона управления, называются корректирующими звеньями. Часто в качестве корректирующих звеньев используют схемы (четырехполюсники), составленные из омического сопротивления, емкости и индуктивности и подключаемые на вход и в обратную связь усилителей.

В качестве корректирующих устройств в последнее время все чаще используют микропроцессоры. С их помощью можно реализовать самые сложные алгоритмы управления.

Исполнительным устройством может быть: электродвигатель, электромагнит и т.п.

1.4. Законы управления

Рассмотрим основные законы управления (регулирования), которые применяются в САУ.

Пропорциональный закон, когда вход и выход регулятора определяются соотношением

$$u(t) = k_{\text{П}}\varepsilon(t),$$

где $k_{\text{П}}$ — коэффициент передачи (заданное число, отличное от нуля). В этом случае говорят о САУ с П-регулятором.

Преимущества П-регулятора - простота и быстродействие, недостатки - ограниченная точность (особенно при управлении объектами с большой инерционностью и запаздыванием).

Интегральный закон, при котором вход и выход регулятора определяются соотношением

$$u(t) = k_{\text{И}} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau,$$

где $k_{\text{И}}$ — коэффициент передачи (заданное число, не равное нулю). В этом случае говорят о САУ с И-регулятором.

При интегральном алгоритме регулирования управляющее воздействие $u(t)$ в каждый момент времени пропорционально интегралу от сигнала ошибки. Поэтому И-регулятор реагирует главным образом на длительные отклонения управляемой величины $y(t)$ от заданного значения $y_{\text{З}}(t)$. Кратковременные отклонения сглаживаются таким регулятором.

Преимущества И-регулятора - лучшая (по сравнению с П-регулятором) точность в установившихся режимах, недостатки - худшие свойства в переходных режимах (меньшее быстродействие и более высокая колебательность).

Дифференциальный закон, при котором вход и выход регулятора определяются соотношением

$$u(t) = k_{\text{Д}}\dot{\varepsilon}(t),$$

где $k_{\text{Д}}$ — коэффициент передачи (заданное число). В этом случае говорят о САУ с Д-регулятором.

Д-регулятор реагирует на скорость изменения величины сигнала ошибки. Благодаря этому при регулировании достигается эффект упреждения. Недостатком Д-регулятора является невозможность обеспечения высокой точности регулирования.

На практике также применяют различные сочетания рассмотренных вариантов регуляторов: ПИ-, ПД-, ПИД-регуляторы. ПИД (пропорционально-интегрально-дифференциальный)-алгоритм - наиболее гибкий алгоритм регулирования (в классе линейных алгоритмов). Он сочетает в себе преимущества более простых вышерассмотренных алгоритмов.

Коэффициенты $k_{\text{П}}$, $k_{\text{И}}$, $k_{\text{Д}}$, входящие в передаточные функции типовых регуляторов, подлежат настройке при наладке САУ и поэтому называются настроечными параметрами.

1.5. **Классификация систем управления**

Для ознакомления с основными видами систем автоматического управления рассмотрим классификацию САУ по ряду признаков, существенных с точки зрения теории автоматического управления.

Таблица 1

№ п/п	Классификационный признак	Выделяемая система
1	по времени	1) непрерывная 2) дискретная
2	в зависимости от типа уравнений, описывающих математическую модель	1) динамическая 2) статическая
3	по типу коэффициентов уравнений	1) стационарная 2) нестационарная
4	по типу связи между входом и выходом	1) разомкнутая 2) замкнутая
5	по виду задающего воздействия	1) система стабилизации 2) система программного управления 3) следящая система
6	в зависимости от использования текущей информации	1) неадаптивная 2) адаптивная
7	по уравнениям, описывающим системы управления	1) линейная 2) нелинейная
8	по характеру внешних и внутренних воздействий	1) детерминированные 2) стохастические

Ниже приводятся комментарии по каждому пункту таблицы 1.

1) Если сигнал на выходе какого-либо элемента квантован по уровню (т.е. принимает дискретные значения) и/или по времени (т. е. представляет

последовательность импульсов), то система управления называется *дискретной*, в противном случае, т.е. когда выходные переменные всех элементов системы управления являются непрерывными функциями, система называется *непрерывной*.

2) *Динамические* системы – математическая модель описывается с помощью дифференциальных уравнений; *статические* – с помощью алгебраических уравнений.

3) *Стационарной* называется система, все параметры которой не изменяются во времени. *Нестационарная система* - это система с переменными во времени параметрами. При математическом описании такой системы некоторые коэффициенты являются функциями времени.

4) В *разомкнутых* САУ выходная величина объекта не измеряется, т.е. нет контроля за состоянием объекта. В *замкнутых* САУ на вход УУ подаются задающее воздействие $g(t)$ и выходная величина объекта $y(t)$. Исходя из величины $g(t)$ управляющее устройство определяет соответствующее требуемое значение y_0 и, имея информацию о текущем значении $y(t)$, обеспечивает необходимое соответствие между $y(t)$ и $g(t)$ путем воздействия на объект.

5) Для систем *стабилизации*: g = const. Для систем *программного управления*: g = g(t), т.е. задающее воздействие — это заданная функция времени. Для *следящих* систем: задающее воздействие заранее не известно и определяется внешними факторами.

6) Система управления называется *неадаптивной*, если текущая информация используется только для выработки управляющего воздействия при неизменном алгоритме управления.

Система называется *адаптивной*, если текущая информация используется также для изменения алгоритма управления и/или задающего воздействия.

7) *Линейной* называется система, которая описывается только линейными уравнениями. Чтобы система была *нелинейной*, достаточно иметь в ее составе хотя бы одно нелинейное звено.

Для линейных систем справедлив принцип суперпозиции, который можно сформулировать следующим образом: *реакция системы на несколько одновременно действующих воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие в отдельности.* Принцип суперпозиции позволяет сводить исследование систем при нескольких одновременно действующих входных воздействиях к исследованию системы с одним входным воздействием.

Необходимо отметить, что реальные линейные системы являются таковыми лишь в определенном диапазоне изменения воздействий. Если не ограничивать диапазон изменения воздействий, то любая САУ становится нелинейной.

8) Система управления называется *детерминированной*, если все воздействия являются детерминированными, и *стохастической*, если хотя бы одно воздействие является стохастическим (случайным).

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Математическое описание САУ и ее элементов часто называют также математической моделью. Математическая модель представляет собой уравнения, передаточные или временные функции, которые описывают процессы, протекающие в системе управления. Математическая модель может быть получена аналитически (теоретически) на основе физических (химических и др.) законов, которым подчиняются процессы в системе управления, или экспериментально. При математическом описании исходят из противоречивых требований. С одной стороны, математическая модель должна как можно полнее отражать свойства оригинала (исходной системы), а с другой стороны — быть по возможности простой, чтобы не усложнять исследование. Модели отражают только существенные для данного конкретного исследования свойства оригинала, не учитывая малосущественные факторы. Это приводит к тому, что один и тот же объект в разных исследованиях может представляться разными моделями.

Математическая модель системы управления может быть представлена в виде соединения звеньев. *Звено* — это математическая модель системы или любой ее части, определяемой некоторым оператором. В частном случае звено может быть математической моделью элемента. Рассмотрим статические и динамические характеристики элемента. Для этого более детально рассмотрим характеристики воздействий и сигналов в САУ.

2.1. **Характеристики воздействий и сигналов САУ**

Большое разнообразие конструкций и условий работы САУ определяет многообразие воздействий и сигналов. Анализ конкретных САУ существенно упрощается, если пользоваться разработанной в ТАУ (теории автоматического управления) типизацией воздействий и сигналов.

Рассмотрим основные типы сигналов и воздействий.

Сигналы являются материальными носителями информации, обусловливающей функционирование систем автоматического управления. В зависимости от характера изменения во времени различают сигналы:

- регулярный (детерминированный);
- нерегулярный.

Регулярный (детерминированный) сигнал - сигнал, который изменяется по определенному закону и может быть описан конкретной математической функцией времени, рис. 4, *а*.

Нерегулярный сигнал - сигнал, который изменяется во времени случайным образом и не может быть представлен конкретной математической функцией. Характер изменения случайного сигнала во времени показан на рис. 4, *б*.

В зависимости от определенности во времени различают сигналы:

- непрерывный (аналоговый);

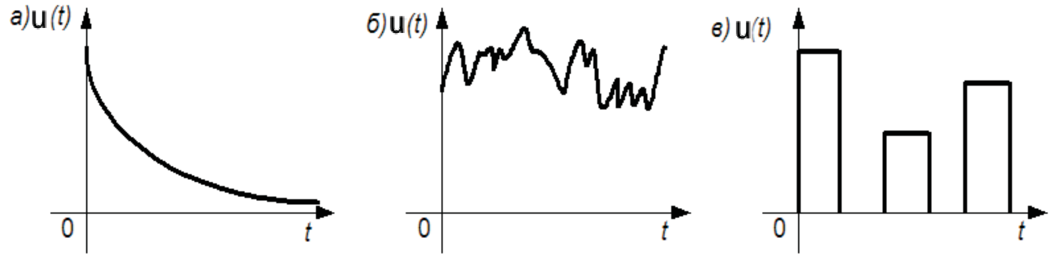


Рис. 4. Виды сигналов

• дискретный.

Непрерывный (аналоговый) сигнал - сигнал, который определен в любой момент времени. Примерами такого сигнала являются сигналы, приведенные на рис. 4 *а,б*.

Дискретный сигнал - сигнал, который определен лишь в некоторые моменты времени (рис. 4, *в*).

При исследовании САУ и их элементов используют ряд стандартных сигналов, называемых *типовыми воздействиями*. Эти воздействия описываются простыми математическими функциями и легко воспроизводятся при исследовании САУ. Использование типовых воздействий позволяет унифицировать анализ различных систем и облегчает сравнение их передаточных свойств.

Наибольшее применение в ТАУ находят следующие типовые воздействия:

• ступенчатое;
• импульсное;
• гармоническое;
• линейное.

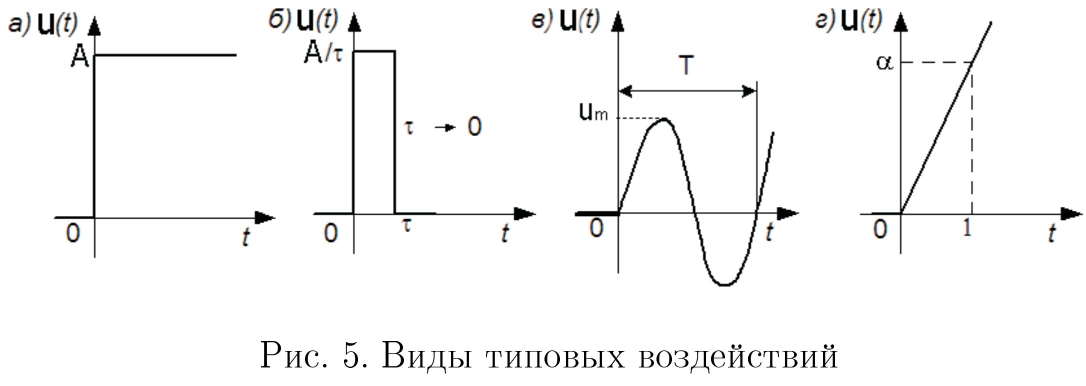


Рис. 5. Виды типовых воздействий

Ступенчатое воздействие - воздействие, которое мгновенно возрастает от нуля до некоторого значения и далее остается постоянным (рис. 5, *а*). Это один из наиболее простых видов сигналов, используемых при расчете переходных процессов в САУ. Ступенчатому воздействию соответствует функция:

$$u(t) = A \cdot \mathbf{1}(t) \begin{cases} 0, & \text{t<0}; \\ A, & t \geq 0, \end{cases}$$

где $A = const$, а $\mathbf{1}(t)$–единичное ступенчатое воздействие, математическое выражение которого имеет следующий вид:

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0, & \text{t<0}; \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Единичное ступенчатое воздействие, возникающее в момент времени $t - \tau$, обозначают $\mathbf{1}(t - \tau)$ и называют единичной функцией с запаздывающим аргументом.

$$\mathbf{1}(t - \tau) = \begin{cases} 0, & \text{t}< \tau; \\ 1, & t \geq \tau. \end{cases}$$

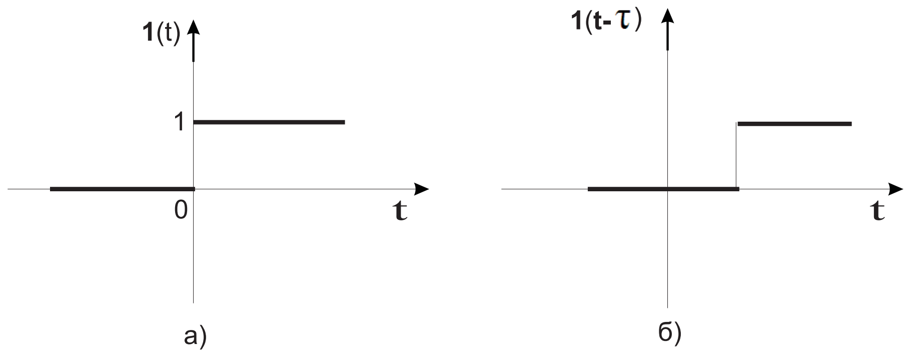


Рис. 6. Графики единичных функций

Импульсное воздействие - одиночный импульс прямоугольной формы, имеющий достаточно большую высоту и малую длительность с площадью A (рис. 5, *б*).

При математическом анализе САУ используют единичное импульсное воздействие, описываемое так называемой дельта-функцией

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0; \\ \infty, & \text{t=0}. \end{cases}$$

Причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Последние два выражения позволяют рассматривать дельта-функцию как импульс, имеющий бесконечно большую высоту, бесконечно малую длительность и единичную площадь. Дельта - функцию можно определить также как производную единичного ступенчатого воздействия:

$$\delta(t) = \frac{d\mathbf{1}(t)}{dt}.$$

Неединичное импульсное ступенчатое воздействие с площадью A обозначается

$$u(t) = A \cdot \delta(t).$$

Гармоническое воздействие - сигнал синусоидальной (или косинусоидальной) формы, описываемый функцией

$$u(t) = u_m \sin(\omega t + \varphi),$$

где u_m–амплитуда сигнала; φ–начальный сдвиг фазы; $\omega = 2\pi/T$–круговая частота; T–период сигнала (рис. 5, *в*).

Гармонический сигнал широко используется при исследовании частотных свойств элементов и систем автоматического управления .

Линейное воздействие - воздействие, описываемое функцией

$$u(t) = \alpha \mathbf{1}(t)t,$$

коэффициент α характеризует скорость нарастания воздействия $u(t)$ (рис.5, *г*).

По характеру изменения выходной величины во времени различают следующие режимы элемента САУ:

- статический;
- динамический.

Статический режим - состояние элемента САУ, при котором выходная величина не изменяется во времени, т.е. $y(t) = const$.

Динамический режим - состояние элемента САУ, при котором входная величина непрерывно изменяется во времени.

Рассмотрим статические и динамические характеристики элементов.

2.2. **Статические характеристики элементов**

Очевидно, что статический режим (или состояние равновесия) может иметь место лишь тогда, когда входные воздействия постоянны во времени. Связь между входными и выходными величинами в статическом режиме описывают алгебраическими уравнениями вида $y = F(u, f)$, в которых отсутствует время t. Соответствующие им графики называются *статическими характеристиками.*

Статическую характеристику элемента можно построить экспериментально, подавая на вход элемента постоянные воздействия и измеряя значения выходной переменной после окончания переходного процесса или вычисляя с использованием уравнения статики.

Статическая характеристика конкретного элемента может быть задана в аналитическом виде или в виде графика.

Как правило, связь между входной и выходной величинами - однозначная. Элемент с такой связью называют *статическим (позиционным)* (рис. 7, а). Элемент с неоднозначной связью - *астатическим* (рис. 7, б).

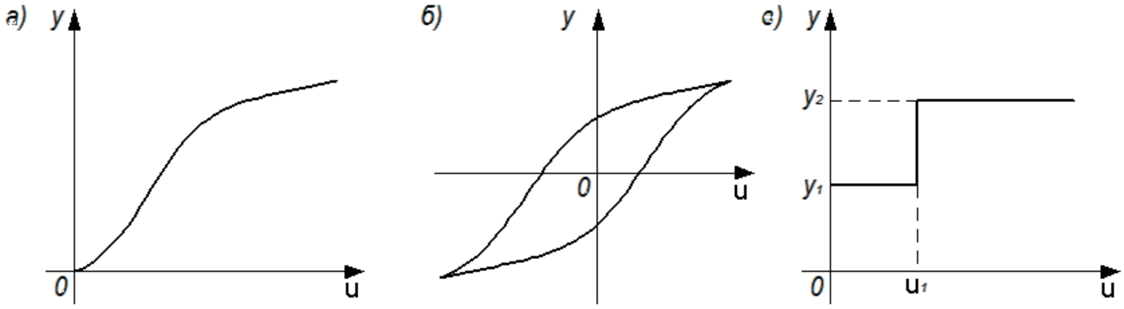


Рис. 7. Виды статических характеристик

По виду статических характеристик элементы разделяют на:

- линейные;
- нелинейные.

Линейный элемент - элемент, имеющий статическую характеристику в виде линейной функции (рис. 8):

$$y = b + au.$$

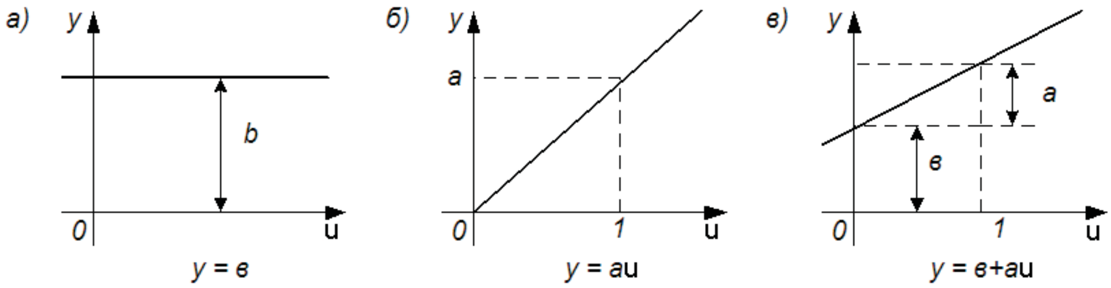


Рис. 8. Виды линейной функции

Нелинейный элемент - элемент, имеющий нелинейную статическую характеристику. Нелинейная статическая характеристика аналитически обычно выражается в виде степенных функций, степенных полиномов, дробных рациональных функций и более сложных функций (рис. 9).

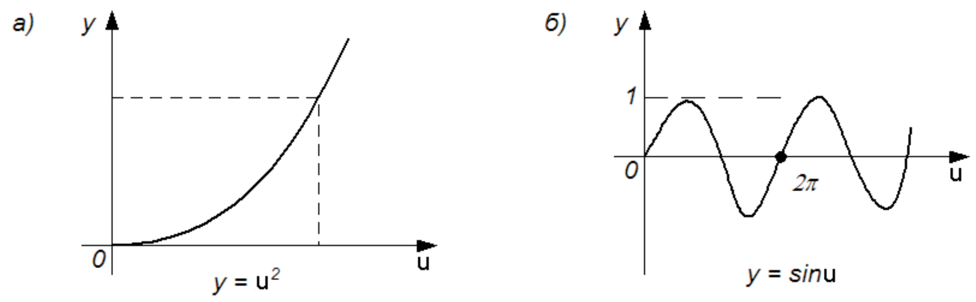


Рис. 9. Виды нелинейных функций

2.3. **Динамический режим**

Динамический режим имеет место, когда в элементе после приложения входного воздействия происходят процессы установления заданного состояния или заданного изменения выходной величины. Эти процессы описываются уравнением динамики $y(t) = F(u, f, t)$, показывающим изменение величин во времени. Как правило, это дифференциальное уравнение или система дифференциальных уравнений. Поэтому основным методом исследования САУ в динамических режимах является метод решения дифференциальных уравнений. Порядок дифференциальных уравнений может быть довольно высоким, то есть зависимостью связаны как сами входные и выходные величины $u(t), f(t), y(t)$, так и скорости их изменения, ускорения и т.д. Поэтому уравнение динамики в общем виде можно записать так:

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}, u, u', u'', \ldots, u^{(m)}, f, f', f'', \ldots, f^{(l)}) = 0.$$

Динамические режимы в свою очередь разделяются на:

- переходный;
- установившийся.

Переходный режим - режим, существующий от момента начала изменения входного воздействия до момента, когда выходная величина начинает изменяться по закону этого воздействия.

Установившийся режим - режим, наступающий после того, когда выходная величина начинает изменяться по такому же закону, что и входное воздействие, т. е. наступающий после окончания переходного процесса. В установившемся режиме элемент совершает вынужденное движение. Очевидно, что статический режим является частным случаем установившегося режима при $u(t) = const$.

Понятия "переходный режим" и "установившийся режим" иллюстрируются графиками изменения выходной величины y(t) при двух типовых входных воздействиях $u(t)$ (рис. 10). Граница между переходным и установившимся режимами показана вертикальной пунктирной линией.

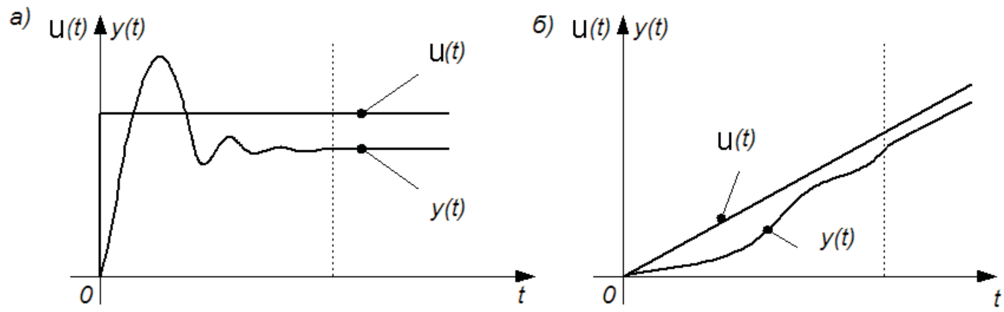


Рис. 10. Переходные и установившиеся режимы при типовых воздействиях

Линеаризация дифференциальных уравнений. В общем случае уравнение динамики оказывается нелинейным, так как реальные звенья САУ обычно нелинейны. В целях упрощения теории нелинейные уравнения заменяют линейными, которые приблизительно описывают динамические процессы в САУ. Получаемая при этом точность уравнений оказывается достаточной для технических задач. Процесс преобразования нелинейных уравнений в линейные называют *линеаризацией*.

Назначение систем управления — это поддержание некоторого заданного режима. При этом режиме входные и выходные переменные звеньев системы изменяются по определенному закону. В частности, в системах стабилизации они принимают определенные постоянные значения. Но из-за различных возмущающих факторов фактический режим отличается от требуемого, и текущие значения входных и выходных переменных не равны значениям, соответствующим заданному режиму. Обычно систему управления проектируют таким образом, чтобы реальный процесс мало отличался от требуемого режима, т.е. чтобы отклонения от заданного режима были малы. Это позволяет производить линеаризацию, разлагая нелинейные функции, входящие в уравнения, в ряд Тейлора в точке, соответствующей заданному режиму, и отбрасывая нелинейные относительно отклонений и их производных слагаемые.

Иногда нелинейную зависимость между отдельными переменными, входящими в уравнение звена, задают в виде графика (кривой). В этих случаях линеаризацию можно проводить графически. Геометрически линеаризация нелинейной зависимости между двумя переменными означает замену исходной кривой AB отрезком касательной A'B' в точке O' (рис. 11), соответствующей заданному режиму, и параллельный перенос начала системы координат в эту точку.

Символическая форма записи дифференциальных уравнений. При описании систем управления удобно использовать символическую форму записи линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрим ее на примере следующего уравнения:

$$a_0\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = b_0\dot{u} + b_1u + c_0v. \qquad (1)$$

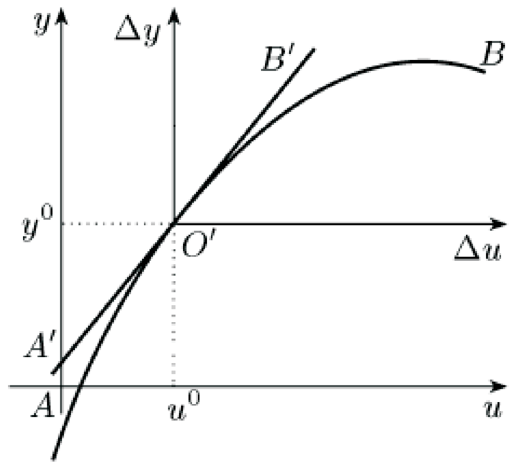


Рис. 11. Линеаризация

Введем для операции дифференцирования по времени обозначение s:

$$s \equiv \frac{d}{dt}, s^i \equiv \frac{d^i}{dt^i}.$$

Здесь знак тождества обозначает равенство по определению.

Используя введенное обозначение, уравнение (1) можно записать в виде:

$$a_0 s^2 y + a_1 s y + a_2 y = b_0 s u + b_1 u + c_0 \upsilon. \tag{2}$$

Рассматривая оператор дифференцирования s как сомножитель, а выражение sy как произведение, не обладающее свойством коммутативности ($sy \neq ys$), уравнение (2) можно записать в виде:

$$(a_0 s^2 + a_1 s + a_2) y = (b_0 s + b_1) u + c_0 \upsilon. \tag{3}$$

Введем обозначения:

$$Q(s) = a_0 s^2 + a_1 s + a_2,\ R_1(s) = b_0 s + b_1,\ R_2(s) = c_0.$$

Используя эти обозначения, последнее уравнение можно записать в виде:

$$Q(s) y = R_1(s) u + R_2(s) \upsilon. \tag{4}$$

Следует иметь в виду, что уравнения (2-4) представляют другую, символическую (операторную) форму записи уравнения (1). Иного смысла они не имеют. Дифференциальный оператор при выходной переменной называют *собственным оператором*, дифференциальный оператор при входной переменной — *оператором воздействия*. В последнем уравнении собственным оператором является $Q(s)$, а операторами воздействия $R_1(s), R_2(s)$.

Преобразование Лапласа. При рассмотрении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами удобно использовать преобразование Лапласа, позволяющее свести решение дифференциальных уравнений к алгебраическим операциям.

Будем действительную функцию действительного аргумента $f(t)$ называть *оригиналом*, если она удовлетворяет трем требованиям:

1. $f(t) \equiv 0$, при $t < 0$.

2. $\mid f(t) \mid < Me^{s_0 t}$, при $t > 0$, где $M > 0$, $s_0 \geq 0$ — некоторые действительные постоянные, s_0 называют *показателем роста функции* $f(t)$. В этом случае говорят, что функция $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции.

3. На любом конечном отрезке $[a, b]$ положительный полуоси Ot функция $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, т.е.

a) ограничена,

b) либо непрерывна, либо имеет лишь конечное число точек разрыва I рода,

c) имеет конечное число экстремумов.

Функции, удовлетворяющие этим трем требованиям, называются в операционном исчислении *изображаемыми по Лапласу или оригиналами.*

Изображением по Лапласу функции f(t) называется функция комплексного переменного $p = s + j\omega$, определяемая соотношением

$$F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt, \tag{5}$$

Тот факт, что функция $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, символически записывается так:

$$F(p) = L\{f(t)\} \text{ или } F(p) \to f(t).$$

В таблице 2 приведены свойства преобразования Лапласа, а в таблице 3 – изображения Лапласа для часто используемых функций.

Найдем изображение некоторых функций по формуле (5).

Пример 1. Найти изображение функции $f(t) = a^t$, $t > 0$.
Решение. Так как $a = e^{\ln a}$, то $f(t) = e^{t \ln a}$ и

$$F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = \int\limits_0^\infty e^{-t(p-\ln a)}dt = -\frac{e^{-t(p-\ln a)}}{p-\ln a}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{p-\ln a}.$$

Пример 2. Найти изображение единичной функции Хевисайда $\mathbf{1(t)}$.
Решение. По формуле (5) получаем

$$\mathbf{1(t)} \leftarrow \int\limits_0^\infty \mathbf{1(t)}e^{-pt}dt = \int\limits_0^\infty e^{-pt}dt = \frac{e^{-pt}}{-p}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{p}.$$

Таблица 2

Свойства преобразования Лапласа

Оригинал	Изображение	Комментарий
$f(\alpha t),\ \alpha = const > 0$	$\frac{1}{\alpha}F(\frac{p}{\alpha})$	Теорема подобия
$\alpha f(t) + \beta g(t),\ \alpha, \beta = const$	$\alpha F(p) + \beta G(p)$	Свойство линейности
$f(t-\tau),\ t > \tau > 0$	$e^{-p\tau}F(p)$	Теорема запаздывания
$f^{(n)}(t)$	$p^n(F(p) - \frac{f(0)}{p} - \ldots - \frac{f^{n-1}(0)}{p^n})$	Дифференцирование оригинала
$\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{p}F(p)$	Интегрирование оригинала
$\left.\begin{array}{l}\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \\ \int\limits_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\end{array}\right\}$	$F(p)g(p)$	Теорема свертывания
$\left.\begin{array}{l}f(0)\cdot g(t) + \int\limits_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau \\ f(0)\cdot g(t) + \int\limits_0^t g(\tau)f'(t-\tau)d\tau\end{array}\right\}$	$pF(p)G(p)$	Формулы Дюамеля
$f(0) = \lim\limits_{p\to\infty} pF(p);$	$f(\infty) = \lim\limits_{p\to 0} pF(p)$	Предельные соотношения

Таблица 3

f(t)	F(p)
1	$\frac{1}{p}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$sh\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$ch\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
$\sin(t-\alpha),\ \alpha>0$	$\frac{e^{-\alpha p}}{p^2+1}$
$\cos(t-\alpha),\ \alpha>0$	$\frac{pe^{-\alpha p}}{p^2+1}$
$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
$t\cos\beta t$	$\frac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$
$t\sin\beta t$	$\frac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$
$t^n\sin\omega t$	$\frac{n!Im(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$
$t^n\cos\omega t$	$\frac{n!Re(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$
$t^n e^{\alpha t}\sin\omega t$	$\frac{n!}{2i}\left[\frac{1}{(p-\alpha-i\omega)^{n+1}}-\frac{1}{(p-\alpha+i\omega)^{n+1}}\right]$
$t^n e^{\alpha t}\cos\omega t$	$\frac{n!}{2}\left[\frac{1}{(p-\alpha-i\omega)^{n+1}}-\frac{1}{(p-\alpha+i\omega)^{n+1}}\right]$

Для нахождения оригинала $f(t)$ по известному изображению $F(p)$ нужно использовать формулы обращения Римана-Меллина. Если функция $f(t)$ является оригиналом, а $F(p)$ служит ее изображением, то в любой точке своей непрерывности функция $f(t)$ равна:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\lim_{\omega\to\infty}\int\limits_{a-i\omega}^{a+i\omega}e^{pt}F(p)dp, \qquad (6)$$

получающийся интеграл (в смысле главного значения) берется вдоль любой прямой $Rep=a>s_0$. Ясно, что при вычислении $f(t)$ применяется весь аппарат ТФКП. На практике используются следующие приемы.

Разложение на простейшие дроби. Если $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ есть дробно-рациональная функция, причем степень числителя $A(p)$ меньше степени знаменателя $B(p)$, то эту дробь раскладывают на сумму простых дробей и находят оригиналы для каждой простой дроби по таблице 3.

Пример 3. Найти оригинал функции $F(p) = \frac{1}{p^3-8}$.
Решение. Разложим данную дробь на простейшие. Получим

$$\frac{1}{p^3-8} = \frac{A}{p-2} + \frac{Bp+C}{p^2+2p+4}.$$

Методом неопределенных коэффициентов находим: $A = \frac{1}{12}$, $B = -\frac{1}{12}$ и $C = -\frac{1}{3}$. Имеем

$$\frac{1}{p^3-8} = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p-2} - \frac{1}{12}\cdot\frac{p+4}{p^2+2p+4} =$$

$$= \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p-2} - \frac{1}{12}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2} - \frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{\sqrt{3}}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}.$$

Используя таблицу 3, получаем:

$$f(t) = \frac{1}{12}e^{2t} - \frac{1}{12}e^{-t}(cos(t\sqrt{3}) + \sqrt{3}sin(t\sqrt{3})).$$

Теорема разложения. Если изображение $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$– правильная рациональная дробь, то оригиналом ее служит функция:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{l}\frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}}[F(p)(p-p_k)^{n_k}e^{pt}],$$

где p_k – полюсы функции $F(p)$ кратности n_k $(k = \overline{1,l})$.

В частности, если все полюсы $F(p)$ простые, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{l}\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}.$$

Пример 4. Найти оригинал по его изображению $F(p) = \frac{1}{p^3(p-1)}$.
Решение. Для функции $F(p)$ точка $p_1 = 0$ является полюсом 3-го порядка, а $p_2 = 1$ - простым полюсом. Для отыскания оригинала найдем вычеты функции

$$\Phi(p) = F(p)e^{pt} = \frac{e^{pt}}{p^3(p-1)}$$

в этих точках. Получаем

$$res\,\Phi(0) = \frac{1}{2!}\lim_{p\to 0}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{e^{pt}}{p-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2!}\lim_{p\to 0}\frac{e^{pt}[t^2(p-1)^2 - 2(tp-t-1)]}{(p-1)^3} = -1 - t - \frac{t^2}{2}.$$

$$res\,\Phi(1) = \frac{1}{(p^4-p^3)'}e^{tp}\bigg|_{p=1} = e^t.$$

Откуда

$$F(p) \to res\Phi(0) + res\Phi(1) = -1 - t - \frac{t^2}{2} + e^t.$$

2.4. **Передаточная функция**

Система или звено с одним выходом и двумя входами в общем случае описывается уравнением:

$$\begin{aligned} a_0y^{(n)} + a_1y^{n-1} + \ldots + a_ny = b_0u^{(m)} + b_1u^{(m-1)} + \ldots \\ \ldots + b_mu + c_0v^{(l)} + c_1v^{(l-1)} + \ldots + c_lv. \end{aligned} \tag{7}$$

В символической форме это уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned} (a_0s^n + a_1s^{n-1} + \ldots + a_n)y = (b_0s^m + b_1s^{m-1} + \ldots + b_m)u+ \\ +(c_0s^l + c_1s^{l-1} + \ldots + c_l)v \end{aligned} \tag{8}$$

или

$$Q(s)y = R_1(s)u + R_2(s)v,$$

где

$$Q(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \ldots + a_n,$$

$$R_1(s) = b_0s^m + b_1s^{m-1} + \ldots + b_m,$$

$$R_2(s) = c_0p^l + c_1p^{l-1} + \ldots + c_l.$$

Наряду с дифференциальными уравнениями при описании линейных систем широко используются передаточные функции.

Передаточной функцией в операторной форме называется отношение оператора воздействия к собственному оператору.

Напомним, что собственным оператором называют дифференциальный оператор при выходной переменной, а оператором воздействия — дифференциальный оператор при входной переменной.

Степень полинома знаменателя называют *порядком*, а разность между степенями знаменателя и числителя — *относительным порядком* передаточной функции и соответствующей системы.

Нулями и полюсами передаточной функции $W(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}$ называют нули ее числителя и знаменателя соответственно, т.е. корни уравнений $R(s) = 0$ и $Q(s) = 0$, где s рассматривается как переменная, а не как оператор.

Если система управления описывается уравнением (7) или (8), собственным оператором является $Q(s)$, а операторами воздействия — оператор воздействия $R_1(s)$ по входу u и оператор воздействия $R_2(s)$ по входу v.

Поэтому в этом случае система определяется двумя передаточными функциями — передаточной функцией

$$W_u(s) = \frac{R_1(s)}{Q(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}$$

относительно входа u и передаточной функцией

$$W_v(s) = \frac{R_2(s)}{Q(s)} = \frac{c_0 s^l + c_1 s^{l-1} + \ldots + c_l}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}$$

относительно входа v.

Передаточная функция в операторной форме является оператором. Ее нельзя рассматривать как обычную дробь. В частности, нельзя числитель и знаменатель сокращать на общий множитель, содержащий оператор дифференцирования.

Пример. Определить передаточную функцию звеньев, описываемых уравнениями:

$$a)\ 0,1\dot{y} + y = 2u;$$

$$b)\ 0,1\ddot{y} + 1,1\dot{y} + y = 2(\dot{u} + u).$$

Решение. В символической форме эти уравнения записываются в виде:

$$a)\ (0,1s + 1)y = 2u;$$

$$b)\ (0,1s^2 + 1,1s + 1)y = 2(s + 1)u.$$

Их передаточные функции равны соответственно:

$$W_1(s) = \frac{2}{0,1s + 1}, \quad W_2(s) = \frac{2(s + 1)}{0,1s^2 + 1,1s + 1}.$$

Передаточной функцией системы (звена) в изображениях Лапласа называют имеющее наименьший порядок отношение изображений ее выходной и входной переменных при нулевых начальных условиях.

Согласно определению передаточная функция в изображениях Лапласа не может иметь равные между собой нули и полюсы, так как в этом случае ее порядок можно было бы понизить, сократив числитель и знаменатель на общий делитель.

Если система (звено) имеет несколько входов, то при определении передаточной функции относительно какой-либо одной входной переменной остальные входные переменные полагают равными нулю.

Найдем передаточные функции (в изображениях Лапласа) для системы, которая описывается уравнением (7). Применим к обеим частям этого уравнения преобразование Лапласа. Тогда, используя свойство линейности преобразования Лапласа, получим

$$a_0 L\{y^{(n)}\} + a_1 L\{y^{n-1}\} + \ldots + a_n L\{y\} = b_0 L\{u^{(m)}\} + b_1 L\{u^{(m-1)}\} + \ldots$$
$$\ldots + b_m L\{u\} + c_0 L\{v^{(l)}\} + c_1 L\{v^{(l-1)}\} + \ldots + c_l L\{v\}.$$

Учитывая свойство 4 преобразования Лапласа (дифференцирование оригинала при нулевых начальных условиях), можно записать в виде

$$\begin{aligned}(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n)Y(p) = (b_0p^m + b_1p^{m-1} + \ldots +\\ +b_m)U(p) + (c_0s^l + c_1s^{l-1} + \ldots + c_l)V(p),\end{aligned} \tag{9}$$

где $Y(p) = L\{y(t)\}$, $U(p) = L\{u(t)\}$, $V(p) = L\{v(t)\}$.

Отсюда, положив $V(p) = 0$, находим передаточную функцию относительно входа u(t):

$$W_u(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_0p^m + b_1p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Аналогично, положив $U(p) = 0$, находим передаточную функцию относительно входа $v(t)$:

$$W_v(p) = \frac{Y(p)}{V(p)} = \frac{c_0p^l + c_1p^{l-1} + \ldots + c_l}{a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Выражение, стоящее в знаменателе,

$$Q(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n$$

также называется собственным оператором, а выражения

$$R_1(p) = b_0p^m + b_1p^{m-1} + \ldots + b_m$$

и

$$R_2(p) = c_0p^l + c_1p^{l-1} + \ldots + c_l$$

операторами воздействия.

Как легко заметить, уравнение в изображениях Лапласа (9) получается из дифференциального уравнения (8), т.е. дифференциального уравнения, записанного в символической форме, при подстановке $s = p$ и замене переменных их изображениями. Поэтому передаточная функция $W(p)$ произвольной стационарной линейной системы связана с ее передаточной функцией (в операторной форме) W(s) соотношением

$$W(p) = W(s)|_{s=p}. \tag{10}$$

В тех случаях, когда W(s) имеет равные между собой нули и полюсы, предполагается, что в правой части (10) после подстановки $s = p$ производится сокращение, и передаточная функция $W(p)$ не имеет равных между собой нулей и полюсов.

Обратное соотношение

$$W(s) = W(p)|_{p=s}$$

справедливо, если передаточная функция W(s) не имеет одинаковых нулей и полюсов.

Если коэффициент $a_n \neq 0$, то передаточная функция не имеет нулевого полюса ($p = 0$), характеризуемый ей элемент называют *астатическим* и передаточная функция этого элемента при $p = 0$ ($t = \infty$) равна *передаточному коэффициенту*:

$$k = W(0) = \frac{b_m}{a_n}.$$

2.5. **Временные функции**

Помимо дифференциальных уравнений и передаточных функций при описании и исследовании линейных систем используют переходные и импульсные переходные функции и их графики — временные характеристики.

Переходной функцией системы (звена) называют функцию, описывающую реакцию системы на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях. Переходную функцию будем обозначать $h(t)$. График переходной функции — кривую зависимости $h(t)$ от времени t — называют *переходной* или *разгонной* характеристикой.

Импульсной переходной или весовой функцией (функцией веса) называют функцию, описывающую реакцию системы (звена) на единичное импульсное воздействие при нулевых начальных условиях.

Весовую функцию будем обозначать $\omega(t)$. График импульсной переходной функции — кривую зависимости функций $\omega(t)$ от времени t — называют *импульсной переходной характеристикой.*

Переходную и импульсную переходную функции называют *временными функциями*, а их графики — *временными характеристиками.*

Между передаточной функцией в изображениях Лапласа, переходной функцией и весовой функцией существует взаимнооднозначное соответствие. Для установления этого соответствия рассмотрим звено (рис.12), которое описывается уравнением:

$$a_0^n y + a_1^{n-1} y + \ldots + a_n y = b_0^m u + b_1^{m-1} u + \ldots + b_m u.$$

В изображениях Лапласа это уравнение принимает вид:

$$Y(p) = W(p)U(p), \tag{11}$$

где $Y(p) = L\{y(t)\}$, $U(p) = L\{u(t)\}$,

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Из определения весовой функции следует, что $y = \omega(t)$ при $u = \delta(t)$ (см. рис. 12, а). И так как при этом $Y(p) = L\{\omega(t)\}$ и $U(p) = L\{\omega(t)\} = 1$, то из уравнения (11) получаем:

$$W(p) = L\{\omega(t)\} = \int_0^\infty \omega(t) e^{-pt} dt, \tag{12}$$

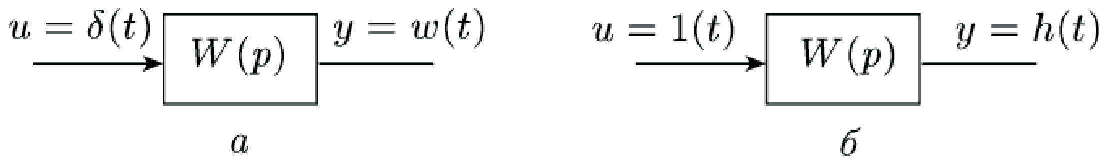


Рис. 12. Определение временных функций: а — весовой функции, б— переходной функции

т. е. передаточная функция в изображениях Лапласа равна изображению Лапласа весовой функции.

Из определения переходной функции следует, что $y = h(t)$ при $u = \mathbf{1}(t)$ (см. рис. 12, б). И так как при этом $U(s) = L\{u(t)\} = \frac{1}{p}$ и $Y(p) = L\{h(t)\}$, то из уравнения (11) получаем:

$$L\{h(t)\} = \frac{W(p)}{p} \Rightarrow W(p) = pL\{h(t)\}.$$

Если в последнем уравнении произвести обратное преобразование Лапласа, то в силу (12) в левой части получим $\omega(t)$, а в правой части в силу свойства преобразования Лапласа, связанного с дифференцированием оригинала, — производную от $h(t)$:

$$\omega(t) = \frac{dh(t)}{dt}. \tag{13}$$

Итак, если известна одна из функций $W(p)$, $\omega(t)$ и $h(t)$, то две другие могут быть определены с помощью формул (12), (13).

Пример. Определить переходную и весовую функции звена с передаточной функцией (в операторной форме):

$$W(s) = \frac{4}{s+2}.$$

Решение. В соответствии с определением передаточной функции дифференциальное уравнение рассматриваемой системы имеет вид:

$$(s+2)y = 4u \text{ или } \dot{y} + 2y = 4u.$$

По определению переходная функция есть решение этого уравнения при $u = \mathbf{1}(t)$, т.е. уравнения

$$\dot{h} + 2h = 4 \cdot \mathbf{1}(t)$$

при нулевом начальном условии: $h(0) = 0$.

Применим операционный метод для решения данного уравнения. По теореме дифференцирования оригинала имеем

$$L\{\dot{h}(t)\} = pH(p) - h(0) = pH(p).$$

Найдем изображение оригинала, стоящего в правой части исходного уравнения:

$$L\{4 \cdot \mathbf{1}(t)\} = \frac{4}{p}.$$

Тогда уравнение в изображениях примет вид:

$$pH(p) + 2H(p) = \frac{4}{p},$$

или

$$H(p) = \frac{4}{p(p+2)} = \frac{2}{p} - \frac{2}{p+2}.$$

Используя таблицу оригиналов, находим переходную функцию

$$h(p) = 2 - 2e^{-2t} = 2(1 - e^{-2t}).$$

Весовая функция:

$$\omega(t) = \frac{dh(t)}{dt} = 4e^{-2t}.$$

2.6. Частотные характеристики

Частотные характеристики описывают передаточные свойства элементов и САУ в режиме установившихся гармонических колебаний, вызванных внешним гармоническим воздействием. Они представляют собой еще один способ описания линейных систем.

Рассмотрим сущность и разновидности частотных характеристик. После завершения переходного процесса установится режим вынужденных колебаний и выходная величина $y(t)$ будет изменяться по тому же закону, что и входная $u(t)$, но в общем случае с другой амплитудой y_m и с фазовым сдвигом по оси времени относительно входного сигнала.

Пусть передаточная функция

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}.$$

Функцию $W(j\omega)$, которая получается из передаточной функции в изображениях Лапласа при подстановке $p = j\omega$

$$W(j\omega) = \frac{b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n},$$

называют *частотной передаточной функцией*. Она является комплексно-значной функцией от действительной переменной ω, называемой частотой.

Частотную передаточную функцию можно представить в виде

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

где

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}, \quad \varphi(\omega) = argW(j\omega).$$

Если $|argW(j\omega)| \leq \frac{\pi}{2}$, то $\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$.

Каждому фиксированному значению частоты ω соответствует комплексное число $W(j\omega)$, которое на комплексной плоскости можно изобразить вектором, имеющим длину $A(j\omega)$ и угол поворота $\varphi(\omega_j)$. Отрицательные значения $\varphi(\omega)$, соответствующие отставанию выходного сигнала от входного, принято отсчитывать по часовой стрелке от положительного направления действительной оси.

При изменении частоты от нуля до бесконечности вектор $W(j\omega)$ поворачивается вокруг начала координат, при этом одновременно изменяется длина вектора.

Годограф этого вектора, т.е. кривую, описываемую концом вектора $W(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞, называют амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ).

Модуль $A(\omega) = |W(j\omega)|$ называют амплитудной частотной функцией, ее график — амплитудной частотной характеристикой. (АЧХ) показывает, как элемент пропускает сигналы различной частоты. Пример (АЧХ) приведен на рис. 13, а.

Аргумент $\varphi(\omega) = argW(j\omega)$ называют фазовой частотной функцией, а его график (при изменении ω от 0 до ∞) — фазовой частотной характеристикой. (ФЧХ) показывает, какое отставание или опережение выходного сигнала по фазе создает элемент при различных частотах. Пример ФЧХ приведен на рис. 13, б.

При практических расчетах САУ (без применения электронных вычислительных машин) удобно использовать частотные характеристики, построенные в логарифмической системе координат. Такие характеристики называют *логарифмическими* (ЛЧХ).

Функцию $L(\omega) = 20lgA(\omega)$ называют *логарифмической амплитудной (частотной) функцией*, а график зависимости функции $L(\omega)$ от логарифма частоты $\lg\omega$ называют *логарифмической амплитудной частотной характеристикой* (ЛАЧХ).

При построении ЛАЧХ по оси абсцисс откладывают значение - частоты в логарифмическом масштабе, при этом на отметке, соответствующей значению $\lg\omega$, записывают значение ω; по оси ординат откладывают и записывают значение $L(\omega) = 20lgA(\omega)$.

Логарифмической фазовой частотной характеристикой (ЛФЧХ) называют график зависимости функции $\varphi(\omega)$ от логарифма частоты $\lg\omega$. При ее построении по оси абсцисс, как и при построении ЛАЧХ, на отметке, соответствующей значению $\lg\omega$, записывают значение ω.

В ЛЧХ единицей $L(\omega)$ является децибел, а единицей $\lg\omega$ — декада. *Декада* - интервал частот, заключенный между произвольным значением частоты ω_j и его десятикратным значением $10\omega_j$.

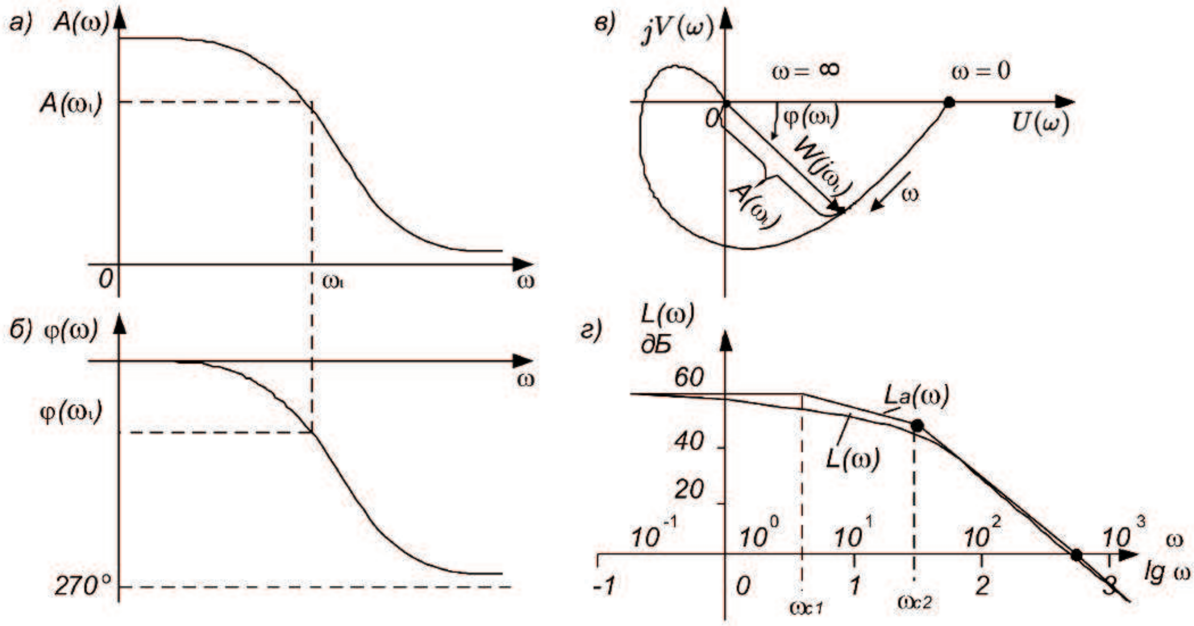


Рис. 13. Частотные характеристики: а - амплитудная; б - фазовая; в - амплитудно-фазовая; г - логарифмическая

2.7. **Типовые звенья и их характеристики**

Функциональные элементы, используемые в САУ, могут иметь самые различные конструктивное выполнение и принципы действия. Однако общность математических выражений, связывающих входные и выходные величины различных функциональных элементов, позволяет выделить ограниченное число так называемых типовых алгоритмических звеньев.

В общем случае какой-либо объект в теории автоматического управления описывается передаточной функцией, содержащей полиномы произвольного порядка в числителе и знаменателе. Но если передаточная функция объекта содержит только простой множитель в числителе (знаменатель при этом представляет собой действительное число) либо только простой множитель в знаменателе (числитель представляет собой действительное число), то объект называется *элементарным звеном* (или просто *типовым звеном*).

Из курса алгебры известно, что полином любого порядка можно разложить на простые множители. То есть любую САУ можно представить в виде последовательного соединения типовых звеньев.

Все линейные типовые звенья разделяют на три группы: позиционные звенья, интегрирующие и дифференцирующие. Позиционные звенья: апериодическое, пропорциональное, колебательное, консервативное и чистого запаздывания - характеризуются тем, что в каждом из них, кроме консервативного, при подаче на вход постоянной величины с течением времени устанавливается постоянное значение выходной величины. В звеньях, относящихся к группе интегрирующих, при постоянном входном воздействии выходная величина неограниченно растет. Дифференцирующие звенья характеризуются тем, что реагируют только на изменение входной величины.

В таблице 4 приведены основные типовые звенья. Рассмотрим последовательно типовые звенья и их характеристики.

Таблица 4

Типовое звено	Передаточная функция
пропорциональное	$W(p) = k$
дифференцирующее (идеальное)	$W(p) = kp$
дифференцирующее (реальное)	$W(p) = \frac{kTp}{Tp+1}$
интегрирующее	$W(p) = \frac{k}{p}$
форсирующее (1-го порядка)	$W(p) = k(Tp+1)$
апериодическое	$W(p) = \frac{k}{Tp+1}$
форсирующее (2-го порядка)	$W(p) = k(T^2p^2 + 2\zeta Tp + 1)$
колебательное	$W(p) = \frac{k}{T^2p^2+2\zeta Tp+1}$
консервативное	$W(p) = \frac{k}{T^2p^2+1}$
запаздывающее	$W(p) = ke^{-p\tau}$

Пропорциональное звено – это звено, для которого в любой момент времени выходная величина пропорциональна входной. Его уравнение имеет вид:

$$y(t) = ku(t).$$

В литературе встречаются и другие названия: *безынерционное, усилительное*. Его частотные и временные функции имеют следующий вид:

$$W(j\omega) = U(\omega) = A(\omega) = k,$$

$$V(\omega) = 0;\ \varphi(\omega) = 0,$$

$$L(\omega) = 20lgk,\ h(t) = k1(t);\ \omega(t) = k\delta(t).$$

Любое реальное звено обладает инерционностью, но с определенной точностью некоторые реальные звенья могут рассматриваться как безынерционные, например: жесткий механический рычаг, редуктор, потенциометр, электронный усилитель и т.п.

Дифференцирующее звено. Идеальным дифференцирующим звеном называется звено, выходная величина которого пропорциональна скорости изменения входного воздействия:

$$y(t) = k\dot{u}(t).$$

При ступенчатом входном воздействии на выходе звена получается мгновенный импульс теоретически с бесконечной амплитудой и бесконечно малой широтой. Его частотные и временные функции имеют следующий вид:

$$W(j\omega) = jk\omega,\ U(\omega) = 0,$$

$$V(\omega) = k\omega,\ A(\omega) = k\omega,$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2},\ L(\omega) = 20lgk + 20lg\omega,$$

$$h(t) = k\delta(t),\ \omega(t) = k\dot{\delta}(t).$$

Идеальное дифференцирующее звено реализовать невозможно, так как величина всплеска выходной величины при подаче на вход единичного ступенчатого воздействия всегда ограничена. На практике используют реальные дифференцирующие звенья, которые обладают конечной инерционностью, вследствие чего осуществляемое ими дифференцирование не является точным. Дифференциальное уравнение такого звена имеет вид

$$T\dot{y}(t) + y(t) = kT\dot{u}(t).$$

Дифференцирующие звенья применяются как средства, корректирующие (улучшающие) переходной процесс. Примерами таких звеньев могут являться стабилизирующие трансформаторы, четырехполюсник из сопротивления и емкости или сопротивления и индуктивности, демпфер и т.п.

Интегрирующее звено – это такое звено, выходная величина которого пропорциональна интегралу по времени от входной величины:

$$y(t) = k\int u(t)dt \text{ или } \dot{y}(t) = ku(t).$$

Его частотные и временные функции имеют следующий вид:

$$W(j\omega) = -\frac{jk}{\omega},\ U(\omega) = 0,$$

$$V(\omega) = -\frac{k}{\omega},\ A(\omega) = \frac{k}{\omega},$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2},\ L(\omega) = 20lgk - 20lg\omega,$$

$$h(t) = kt,\ \omega(t) = k.$$

Примером интегрирующего звена может служить двигатель постоянного тока с постоянным потоком возбуждения, у которого можно пренебречь электромагнитной и электромеханической постоянными времени.

Форсирующее звено 1-го порядка. Так называют звено с передаточной функцией

$$W(s) = k(Ts + 1).$$

Его частотные и временные функции имеют следующий вид:

$$W(j\omega) = k(Tj\omega + 1),\ U(\omega) = k,$$

$$V(\omega) = kT\omega, A(\omega) = k\sqrt{(T\omega)^2 + 1},$$

$$\varphi(\omega) = arctg(T\omega), L(\omega) = 20lgk + 20lg\sqrt{(T\omega)^2 + 1},$$

$$h(t) = k[\delta(t) + 1(t)],\ \omega(t) = k[T\dot{\delta(t)} + \delta(t)].$$

Апериодическое звено – такое звено, выходная величина которого изменяется по экспоненциальному закону. В литературе встречается и другое название - *инерционное звено первого порядка*. Данное звено описывается дифференциальным уравнением первого порядка:

$$T\dot{y}(t) + y(t) = ku(t).$$

Его частотные и временные функции имеют следующий вид:

$$W(j\omega) = \frac{1}{(Tj\omega + 1)},\ U(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}},$$

$$V(\omega) = \frac{-kT\omega}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}},\ A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}},$$

$$\varphi(\omega) = -arctg(T\omega),\ L(\omega) = 20lgk - 20lg\sqrt{(T\omega)^2 + 1},$$

$$h(t) = k[1 - e^{-\frac{t}{T}}],\ \omega(t) = \frac{k}{T}e^{-\frac{t}{T}}.$$

К апериодическим звеньям можно отнести $RL-$ и $RC-$контуры, генераторы постоянного тока, термисторы и т.д.

Форсирующее звено 2-го порядка. Так называют звено с передаточной функцией

$$W(s) = k(T^2s^2 + 2\xi Ts + 1)\ (0 < \xi < 1).$$

Его частотные функции имеют следующий вид:

$$W(j\omega) = k[1 - (T\omega)^2 + j2\xi T\omega],\ U(\omega) = k[1 - (T\omega)^2],$$

$$V(\omega) = 2k\xi T\omega,\ A(\omega) = k\sqrt{[1 - (T\omega)^2]^2 + (2\xi T\omega)^2},$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} arctg\frac{2\xi T\omega}{1-(T\omega)^2}, & \text{при } \omega \le \frac{1}{T} \\ \pi + arctg\frac{2\xi T\omega}{1-(T\omega)^2}, & \text{при } \omega > \frac{1}{T} \end{cases},$$

$$L(\omega) = 20lgk + 20lg\sqrt{[1 - (T\omega)^2]^2 + (2\xi T\omega)^2}.$$

Временные функции не приведены, так как они в расчетах практически не используются.

Колебательное звено (или, иначе, инерционное звено второго порядка)– такое звено, выходная величина которого при подаче на вход ступенчатого воздействия стремится к установившемуся значению, совершая затухающие колебания либо апериодически (монотонно) приближаясь к нему. Переходной процесс такого звена описывается дифференциальным уравнением второго порядка:

$$T^2\ddot{y}(t) + 2\zeta T\dot{y}(t) + y(t) = ku(t).$$

Частотные и временные функции колебательного звена имеют следующий вид:

$$W(j\omega) = \frac{k}{[1-(T\omega)^2 + j2\xi T\omega]},\ U(\omega) = \frac{k[1-(T\omega)^2]}{[1-(T\omega)^2]^2 + (2\xi T\omega)^2},$$

$$V(\omega) = \frac{-2k\xi T\omega}{[1-(T\omega)^2]^2 + (2\xi T\omega)^2},\ A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{[1-(T\omega)^2]^2 + (2\xi T\omega)^2}},$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -arctg\frac{2\xi T\omega}{1-(T\omega)^2}, & \text{при } \omega \le \frac{1}{T} \\ -\pi - arctg\frac{2\xi T\omega}{1-(T\omega)^2}, & \text{при } \omega > \frac{1}{T} \end{cases},$$

$$L(\omega) = 20lgk - 20lg\sqrt{[1-(T\omega)^2]^2 + (2\xi T\omega)^2},$$

$$h(t) = k[1 - \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}e^{-\alpha t}\sin(\beta t + \varphi_0)],\quad \omega(t) = \frac{k(\alpha^2+\beta^2)}{\beta}e^{-\alpha t}\sin\beta t,$$

где $\alpha = \frac{\xi}{T}$, $\beta = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$, $\varphi_0 = arctg\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$.

К колебательным звеньям можно отнести электрические колебательные контуры, электромашинный усилитель и т.д.

Консервативное звено – частный случай колебательного звена, когда отсутствует демпфирование. Оно описывается дифференциальным уравнением

$$T^2\ddot{y}(t) + y(t) = ku(t).$$

Частотные и временные функции можно получить из соответствующих функций колебательного звена, положив $\zeta = 0$. Примером консервативного звена может служить идеальный пассивный четырехполюсник, состоящий из индуктивности и емкости.

Звено чистого запаздывания. Это звено без искажения воспроизводит на выходе входную величину как пропорциональное звено, но с той разницей, что выходная величина запаздывает относительно входной на постоянное время τ:

$$y(t) = ku(t-\tau).$$

Его частотные и временные функции имеют следующий вид:

$$W(j\omega) = ke^{-j\omega\tau}\omega,\ U(\omega) = k\cos(\tau\omega),$$

$$V(\omega) = -k\sin(\tau\omega),\ A(\omega) = k,$$
$$\varphi(\omega) = -\omega\tau,\ L(\omega) = 20lgk,$$
$$h(t) = k\mathbf{1}(t-\tau),\ \omega(t) = k\delta(t-\tau).$$

По существу это звено относится к нелинейным. Однако при расчетах САУ с такими звеньями можно применять методы теории линейных систем. Поэтому часто элементы, закон движения которых мало изучен или трудно представим в аналитической форме, после некоторой идеализации представляются в виде звеньев запаздывания. В качестве примера звена можно назвать длинную электрическую линию без потерь, механический транспортер и т.д.

2.8. **Асимптотические ЛАЧХ**

Логарифмические амплитудные частотные характеристики (ЛАЧХ) пропорционального, дифференцирующего и интегрирующего звеньев являются прямыми, и их легко построить. Построение ЛАЧХ других элементарных звеньев требует трудоемких вычислений. Поэтому на практике часто ограничиваются построением приближенных асимптотических ЛАЧХ.

При построении асимптотической ЛАЧХ апериодического звена в выражении $20lgk - 20lg\sqrt{(T\omega^2)+1}$ при $\omega < \frac{1}{T}$ под корнем пренебрегают слагаемым $(T\omega)^2$, меньшим единицы, а при $\omega \geq \frac{1}{T}$ - единицей. Поэтому уравнение асимптотической ЛАЧХ имеет вид:

$$L(\omega) \cong \begin{cases} 20lgk, & \text{при } \omega < \frac{1}{T}, \\ 20lgk - 20lg(T\omega), & \text{при } \omega \geq \frac{1}{T}. \end{cases}$$

При построении асимптотической ЛАЧХ колебательного звена в выражении

$$L(\omega) = 20lgk - 20lg\sqrt{[1-(T\omega)^2]^2 + (2\xi T\omega)^2}$$

при $\omega < \frac{1}{T}$ под корнем оставляют только единицу, а при $\omega \geq \frac{1}{T}$— только наибольшее слагаемое $(T\omega)^2$. Поэтому уравнение асимптотической ЛАЧХ имеет вид:

$$L(\omega) \cong \begin{cases} 20lgk, & \text{при } \omega < \frac{1}{T}, \\ 20lgk - 40lg(T\omega), & \text{при } \omega \geq \frac{1}{T}. \end{cases}$$

Аналогично поступают при построении асимптотических ЛАЧХ форсирующих звеньев.

Частоты, на которых асимптотические ЛАЧХ претерпевают излом, называются *сопрягающими частотами.*

Для построения логарифмической амплитудной (ЛАЧХ) и фазовой (ЛФЧХ) частотной характеристик звена с произвольной дробно-рациональной передаточной функцией $W(p)$ нужно ее числитель и знаменатель разложить на элементарные множители и представить $W(p)$ в виде произведения передаточных функций элементарных звеньев:

$$W(p) = \prod_i W_i(p).$$

Получаем:

$$L(\omega) = 20lg|W(j\omega)| = \sum_i lg|W_i(\omega)|,$$

$$\varphi(\omega) = argW(j\omega) = \sum_i argW_i(j\omega).$$

Таким образом, для построения ЛАЧХ произвольного звена достаточно построить ЛАЧХ элементарных звеньев, на которые оно разлагается, а затем их геометрически сложить. Однако для построения асимптотических ЛАЧХ можно использовать несколько иное, более простое правило. Проиллюстрируем на примере. Пусть

$$W(p) = \frac{100(p+1)}{p(10p+1)(0,01p^2+0,1p+1)}.$$

Логарифмическая амплитудная частотная функция имеет вид:

$$L(\omega) = 40 + 20lg\sqrt{\omega^2+1} - 20lg\omega - 20lg\sqrt{(10\omega)^2+1} -$$
$$-20lg\sqrt{(1-0,01\omega)^2+(0,1\omega)^2}.$$

Вычислим сопрягающие частоты и пронумеруем их в порядке возрастания:

$$\omega_1 = \frac{1}{10}, \quad \omega_2 = 1, \quad \omega_3 = 10.$$

Здесь $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — сопрягающие частоты апериодического, форсирующего и колебательного звеньев соответственно.

При $\omega < \omega_1$ получаем:

$$L(\omega) \cong 40 - 20lg\omega.$$

Это уравнение прямой, которая проходит через точку с координатами $\omega = 1$ и $L = 40$ с наклоном —20дБ/дек. Прямая имеет наклон —20дБ/дек; это означает, что при увеличении частоты на декаду (т.е. в 10 раз) $L(\omega)$ уменьшается на 20дБ (14, а).

Первая асимптота заканчивается на первой сопрягающей частоте (14,б).

При $\omega_1 \le \omega < \omega_2$ аналогично имеем:

$$L(\omega) =\cong 40 - 20lg\omega - 20lg(10\omega) = 20 - 40lg\omega.$$

Это уравнение второй асимптоты. Ее наклон по отношению к первой асимптоте изменяется на — 20дБ/дек и обуславливается апериодическим звеном, т. е. множителем 1-го порядка в знаменателе рассматриваемой передаточной функции. Вторую асимптоту проводят от конца первой асимптоты до второй сопрягающей частоты согласно ее уравнению под наклоном — 40дБ/дек.

При $\omega_2 \leq \omega < \omega_3$ получаем:

$$L(\omega) \cong 20 - 40lg\omega + 20lg\omega = 20 - 20lg\omega.$$

Это уравнение третьей асимптоты. Ее наклон по отношению ко второй асимптоте изменяется на 20 дБ/дек и обуславливается форсирующим звеном, т. е. множителем 1-го порядка в числителе. Третью асимптоту проводят от конца второй асимптоты до третьей сопрягающей частоты под наклоном —20дБ/дек.

При $\omega \geq \omega_3$ имеем:

$$L(\omega) \cong 20 - 20lg\omega - 20lg(0,1\omega)^2 = 60 - 60lg\omega.$$

Это уравнение последней, четвертой асимптоты. Ее наклон изменяется по отношению к третьей асимптоте на —40дБ/дек и обуславливается колебательным звеном, т.е. множителем 2-го порядка в знаменателе.

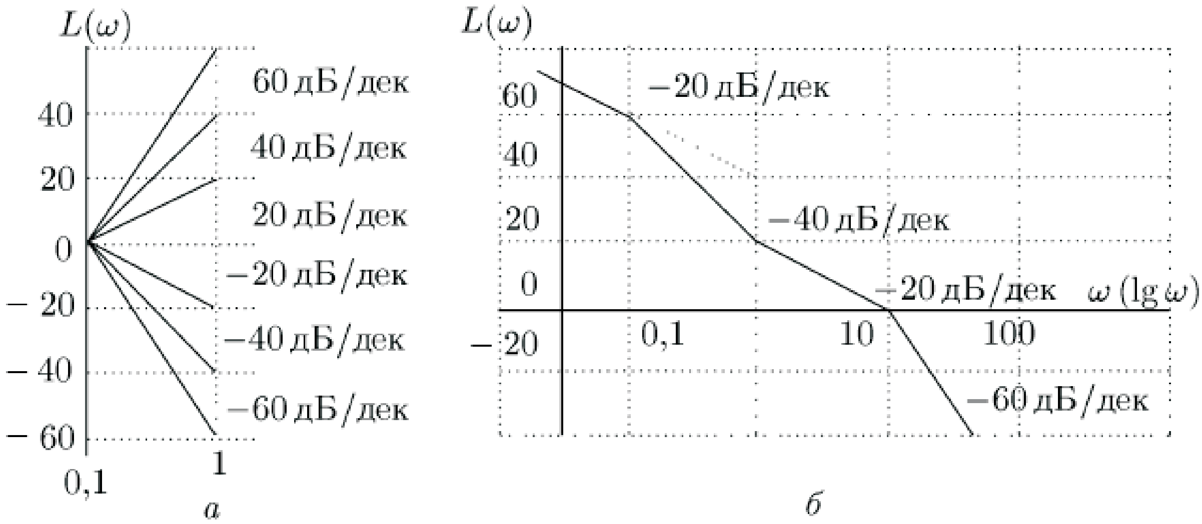


Рис. 14. Асимптотические ЛАЧХ: а — наклоны асимптот; б — асимптотическая ЛАЧХ

2.9. **Структурные схемы**

Структурная схема системы управления является графическим представлением ее математической модели. Структурная схема может содержать следующие четыре типа элементов: звенья направленного действия; устройства сравнения, или сумматоры; линии связи; точки разветвления (узлы).

Звенья направленного действия изображаются прямоугольниками, внутри которых записываются их передаточные функции.

Между собой звенья соединяются с помощью линий связи. На этих линиях стрелками указывается направление распространения сигналов. Следует подчеркнуть, что в направлениях, противоположных указанным стрелкам, сигналы не распространяются. Сами линии связи, также как и сумматоры, считаются идеальными, то есть никакими параметрами не обладают.

Сумматоры предназначены для суммирования сигналов (рис. 15, а). Однако если перед каким-либо входом стоит знак минус, переменная по этому входу вычитается (складывается со знаком минус) (рис. 15, б).

Рис. 15. Изображение сумматоров: а — суммирование; б— вычитание

Для распределения сигналов по различным направлениям используются узлы, которые обозначаются точками в местах пересечения линий связи.

Для удобства расчетов бывает необходимо преобразовать исходную структурную схему системы к какому-либо желаемому виду, чаще всего - к цепи последовательно соединенных звеньев. В связи с этим рассмотрим основные правила преобразования структурных схем. Звенья будем описывать передаточной функцией в изображениях Лапласа. При этом для краткости записи аргументы передаточных функций и переменных будем опускать.

Последовательное соединение. Так называется соединение, при котором выходная переменная предшествующего звена является входной переменной последующего звена (рис. 16, а). При последовательном соединении передаточные функции отдельных звеньев перемножаются, и при преобразовании структурных схем цепочку из последовательно соединенных звеньев можно заменить одним звеном с передаточной функцией $W(p) = W_1(p)W_2(p)\dots W_n(p)$ (рис. 16, б).

Параллельное соединение. Так называется соединение, при котором на входы всех звеньев подается одно и то же воздействие, а их выходные переменные складываются (рис. 17, а). При параллельном соединении звеньев

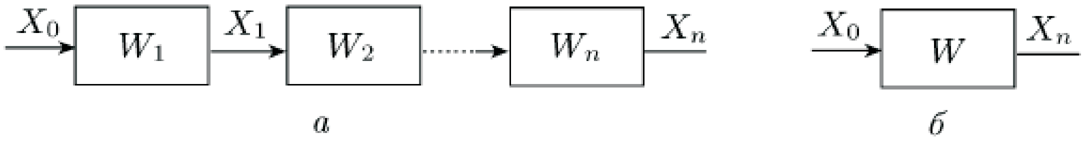


Рис. 16. Последовательное соединение

передаточные функции складываются, и при преобразовании их можно заменить одним звеном с передаточной функцией $W(p) = \sum\limits_{i=1}^{n} W_i(p)$ (рис. 17, б). Если выход какого-либо звена поступает на сумматор с отрицательным знаком, то передаточная функция этого звена складывается с отрицательным знаком, т.е. вычитается.

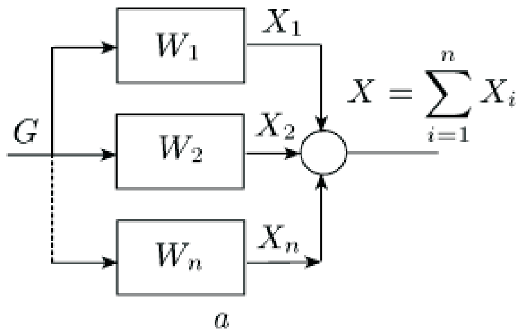


Рис. 17. Параллельное соединение

Обратное соединение, или звено, охваченное обратной связью. Так называется соединение двух звеньев, при котором выход звена прямой цепи подается на вход звена обратной связи, - выход которого складывается с входом первого звена (рис. 18, а).

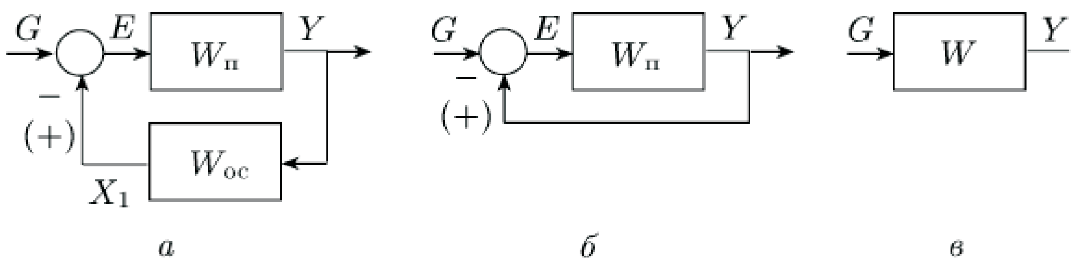


Рис. 18. Обратное соединение

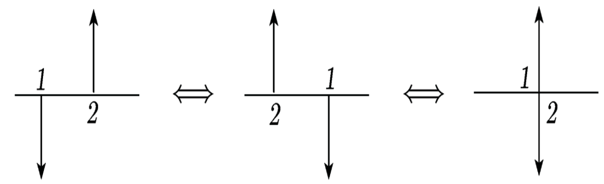
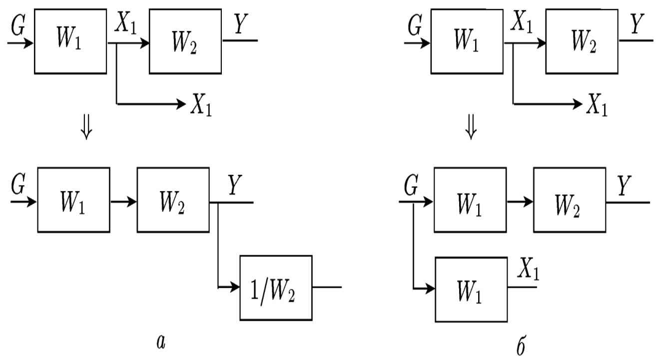
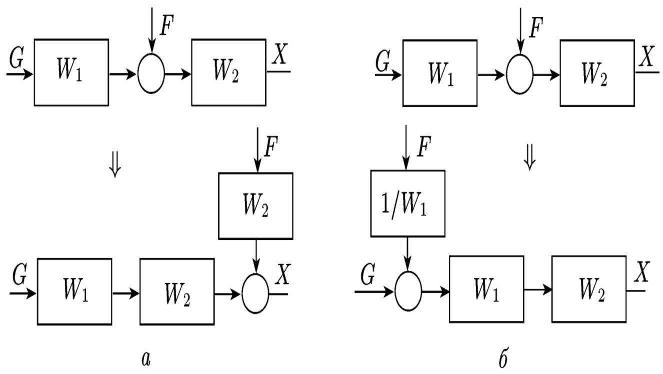
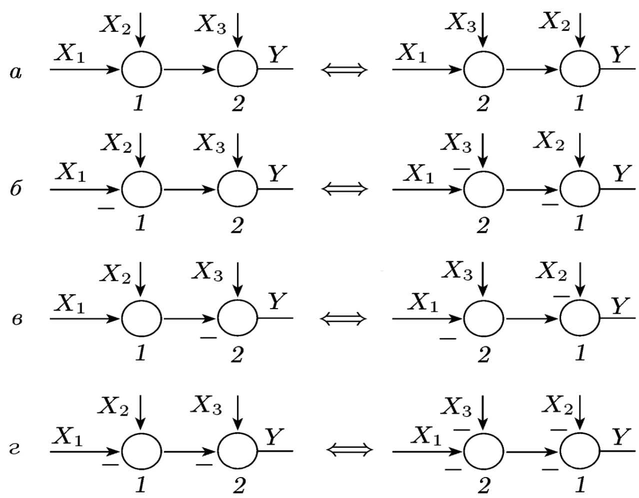
Если сигнал обратной связи (выход звена обратной связи) вычитается (т.е. складывается с отрицательным знаком), то обратная связь называется *отрицательной*, в противном случае — *положительной*. Когда передаточная функция звена обратной связи равна единице ($W_{oc}(p) = 1$), обратное соединение изображается так, как показано на рис. 18, б.

Найдем передаточную функцию $W(p)$ звена с обратной связью. По определению она равна
$$W(p) = \frac{Y(p)}{G(p)}.$$
При этом
$$Y(p) = W_{\text{П}}(p)(G(p) \mp W_{\text{ОС}}(p)Y(p)),$$
где $W_{\text{П}}(p)$ и $W_{\text{ОС}}(p)$ – передаточные функции соответственно прямой цепи и цепи обратной связи. Разделим обе части данного равенства на $G(p)$. Получим
$$\frac{Y(p)}{G(p)} = W_{\text{П}}(p)\left(1 \mp W_{\text{ОС}}(p)\frac{Y(p)}{G(p)}\right).$$
Учитывая вышесказанное, получаем
$$W(p) = W_{\text{П}}(p)(1 \mp W_{\text{ОС}}(p)W(p)).$$
Разрешив это уравнение относительно $W(p)$, получаем
$$W(p) = \frac{W_{\text{П}}(p)}{1 \pm W_{\text{П}}(p)W_{\text{ОС}}(p)}.$$

С помощью рассмотренных правил удается преобразовать (упростить) любую структурную схему, не содержащую перекрестных связей между звеньями. Если же схема многоконтурная и содержит перекрестные связи, то эти правила можно применять лишь после устранения этих перекрестных связей. Для устранения перекрестных связей следует использовать ряд вспомогательных правил преобразований структурных схем, которые приведены в таблице 5.

Таблица 5

Вспомогательные правила

Операция	Исходная и преобразованная схема
Перестановка узлов	
Перенос узла а)по ходу сигнала б)против хода сигнала	
Перенос сумматора а)по ходу сигнала б)против хода сигнала	
Перестановка сумматоров	

2.10. **Методы моделирования САУ на ЦВМ**

Мощным инструментом при решении задач ТАУ являются цифровые вычислительные машины (ЦВМ), в частности персональные электронные вычислительные машины (ПЭВМ). Целью моделирования САУ на ЦВМ является расчет изменения управляемой величины $y(t)$ в переходном режиме. Результаты этого расчета необходимы при анализе работы САУ и ее создании (синтезе). Моделирование САУ на ЦВМ в зависимости от применяемых математических методов можно осуществлять двумя путями:

- путем численного интегрирования;
- путем структурного моделирования.

Численное интегрирование - интегрирование совокупности дифференциальных уравнений, описывающих движение (изменение режимных параметров во времени) САУ.

Весьма удобным инструментом для осуществления численного интегрирования является программный продукт "VisSim" для ПЭВМ, предназначенный преимущественно для моделирования виртуальных устройств, входящих в состав САУ. Из виртуальных устройств, имеющихся в продукте "VisSim", можно собирать алгоритмические схемы для решения системы дифференциальных и/или алгебраических уравнений и отображать результаты решения на различных виртуальных индикаторах (стрелочных показывающих приборах, дисплее, графопостроителе и т. п.). Для численного интегрирования системы дифференциальных уравнений, описывающих переходный процесс в САУ, эти уравнения следует представлять в нормальной форме Коши, т.е. разрешенными относительно первых производных.

Структурное моделирование - моделирование, осуществляемое с помощью алгоритмической схемы САУ, состоящей из типовых динамических звеньев, арифметических звеньев и/или звеньев с известными передаточными функциями.

Весьма удобным инструментом для реализации структурного моделирования также является программный продукт "VisSim". В нем преимущественно с помощью блоков "Transfer function" собирается алгоритмическая схема САУ, которая и используется для анализа работы системы.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Устойчивость является одним из основных требований к системам автоматического управления (САУ). Поэтому важно уметь определять (исследовать) и соответствующим выбором структуры и параметров системы управления обеспечивать ее устойчивость.

3.1. **Определение и условия устойчивости**

Если на систему управления действуют два внешних воздействия - задающее воздействие $g(t)$ и возмущение $f(t)$, - то в общем случае она описывается уравнением

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = b_0 g^{(m)} g + b_1 g^{(m-1)} + \ldots + b_m g +$$
$$+ c_0 f^{(l)} + c_1 f^{(l-1)} + \ldots + c_l f. \tag{14}$$

При $g \equiv 0$ и $f \equiv 0$ получаем однородное дифференциальное уравнение

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_n y = 0. \tag{15}$$

Назначением систем управления является поддержание некоторого заданного режима, называемого невозмущенным движением. Если на систему действует возмущение, то фактическое движение (которое называется возмущенным движением) будет отличаться от невозмущенного движения. Невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым, если после окончания действия возмущения возмущенное движение $y(t)$ с течением времени стремится к невозмущенному движению $y_{\text{Н}}(t) : y(t) \to y_{\text{Н}}(t)$ при $t \to \infty$. Линейная система управления называется устойчивой или асимптотически устойчивой, если любое ее невозмущенное движение, определяемое задающим воздействием, асимптотически устойчиво. Общее решение уравнения (14) имеет вид

$$y(t) = y_{\text{В}}(t) + y_{\text{С}}(t), \tag{16}$$

где $y_{\text{В}}(t)$ - частное решение уравнения (14), $y_{\text{С}}(t)$ - общее решение однородного уравнения (15). Частное решение $y_{\text{В}}(t)$ можно представить (в силу принципа суперпозиции) в виде

$$y_{\text{В}}(t) = y_g(t) + y_f(t),$$

где $y_g(t)$ - частное решение уравнения (14) при $f \equiv 0$, $y_f(t)$ - частное решение этого уравнения при $g \equiv 0$.

Общее решение $y_{\text{С}}(t)$ однородного уравнения описывает свободное движение системы управления (т.е. движение при отсутствии внешних воздействий), определяемое только начальными условиями. Частное решение $y_{\text{В}}(t)$ описывает вынужденное движение, определяемое внешними воздействиями. В частности, при отсутствии возмущающего воздействия $f = 0$, частное решение $y_{\text{В}}(t) = y_g(t)$ описывает невозмущенное движение: $y_{\text{В}}(t) = y_{\text{Н}}(t)$. Таким образом, если после начального момента t_0 возмущение перестает действовать, решение (16) можно записать в виде

$$y(t) = y_{\text{Н}}(t) + y_{\text{С}}(t) \text{ при } (t \geq to).$$

Возмущение, которое действует до начального момента t_0, влияет на начальные условия, от которых зависит только свободное движение. Поэтому для того чтобы возмущенное движение было асимптотически устойчиво (т.е. для $y(t) \to y_{\text{Н}}(t)$ при $t \to \infty$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t\to\infty} y_{\text{С}}(t) = 0. \tag{17}$$

Это соотношение можно принять за математическое определение устойчивости (асимптотической устойчивости) линейных стационарных систем управления.

Условие устойчивости. Найдем общее решение $y_{\text{С}}(t)$ однородного уравнения (15). Для этого составим характеристическое уравнение, которое будет иметь следующий вид:

$$Q(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots a_n = 0. \tag{18}$$

Левая часть этого уравнения ($Q(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots a_n$) называется *характеристическим полиномом.*

Если λ_i $(i = 1, \ldots, q)$ - корни характеристического уравнения кратности k_i $(k_1 + k_2 + \ldots + k_q = n)$, то общее решение однородного уравнения $y_{\text{С}}(t)$ имеет вид

$$y_{\text{С}}(t) = \sum_{i=1}^{n} P_i(t)e^{\lambda_i t}, \tag{19}$$

где $P_i(t) = C_1^{(i)} + C_2^{(i)}t + \ldots C_{k_i}^{(i)}t^{k_i-1}$; $C_1^{(i)}, C_2^{(i)}, \ldots, C_{k_i}^{(i)}$ - постоянные интегрирования. В частном случае, когда все корни простые,

$$y_{\text{С}}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)e^{\lambda_i t}.$$

По правилу Лопиталя можно показать, что $P_i(t)e^{\lambda_i t} \to 0$ при $t \to \infty$ тогда и только тогда, когда действительная часть корня λ_i отрицательна: $Re\lambda_i < 0$. Поэтому правая часть в (19) будет стремиться к нулю при $t \to \infty$, т. е. будет выполнено (необходимое и достаточное) условие устойчивости (17), если

$$Re\lambda_i < 0,\ i = 1, 2, \ldots, q.$$

Это условие является основным условием устойчивости. Оно непосредственно вытекает из математического определения устойчивости.

Основное условие устойчивости. *Для того чтобы система управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения имели отрицательную вещественную часть.*

На комплексной плоскости корни, имеющие отрицательную вещественную часть, располагаются в левой полуплоскости и поэтому называются *левыми*; корни, имеющие положительную вещественную часть, располагаются в правой полуплоскости и называются *правыми*; а корни, расположенные на мнимой оси, называются *нейтральными.*

Согласно основному условию устойчивости определение устойчивости сводится к исследованию корней характеристического уравнения. Однако для этого нет необходимости вычислять эти корни. Существуют различные критерии устойчивости, которые позволяют судить о том, находятся ли корни полинома в левой полуплоскости, не вычисляя их.

Необходимое условие устойчивости. *Для того чтобы система была устойчива, необходимо, чтобы все коэффициенты ее характеристического уравнения были строго одного знака:*

$$a_0 > 0, a_1 > 0, \ldots, a_n > 0 \tag{20}$$

или

$$a_0 < 0, a_1 < 0, \ldots, a_n < 0 \tag{21}$$

Теоремы Ляпунова об устойчивости по линейному приближению. Практически все системы управления являются нелинейными, а линейные системы управления следует рассматривать как приближенные, линеаризованные модели нелинейных систем. Линеаризация производится относительно заданного номинального режима $y_0(t)$, называемого в теории устойчивости *невозмущенным* движением. Невозмущенное движение $y_0(t)$ нелинейной системы называется *асимптотически устойчивым*, если существует некоторая окрестность вокруг невозмущенного движения такая, что любое возмущенное движение $y(t)$, начинающееся в момент t_0 окончания действия возмущения в этой окрестности, в дальнейшем не выходит из этой окрестности и $y(t) \to y_0(t)$ при $t \to \infty$.

Теоремы Ляпунова

1. Если все корни характеристического уравнения линеаризованной модели являются левыми, то невозмущенное движение соответствующей нелинейной системы асимптотически устойчиво.

2. Если среди корней характеристического уравнения линеаризованной модели имеется правый корень, то невозмущенное движение соответствующей нелинейной системы неустойчиво.

3. Случай, когда среди корней характеристического уравнения линеаризованной модели имеются нейтральные корни (корни на мнимой оси), но нет правых корней, называют критическим. В критическом случае по линеаризованной модели нельзя судить об устойчивости невозмущенного движения нелинейной системы.

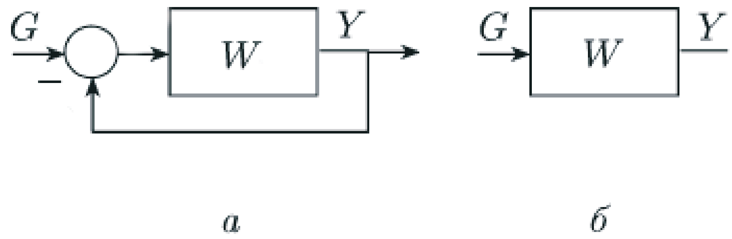


Рис. 19. Система: а) замкнутая; б) разомкнутая

3.2. **Алгебраические критерии устойчивости**

Алгебраическими критериями устойчивости называются такие условия, составленные из коэффициентов характеристического уравнения, при выполнении которых система устойчива, а при невыполнении - неустойчива. При проведении исследования устойчивости с помощью алгебраических критериев следует прежде всего проверить выполнение необходимого условия устойчивости.

Характеристическое уравнение. Для того чтобы исследовать устойчивость с помощью алгебраических критериев, необходимо иметь характеристический полином.

Характеристический полином $Q(\lambda)$ получается из собственного оператора $Q(p)$ простой заменой оператора р на комплексную переменную λ. Поэтому достаточно найти собственный оператор.

Если дано уравнение системы управления и оно записано в символической форме, то дифференциальный оператор при выходной переменной и будет собственным оператором. Если дана передаточная функция, то можно принять, что собственный оператор совпадает с ее знаменателем.

При исследовании замкнутой системы (рис. 19, а) нет необходимости находить ее передаточную функцию, если известна передаточная функция $W(p) = \frac{R(p)}{S(p)}$ разомкнутой системы (рис. 19, б). Ее собственный оператор $Q(p)$ равен сумме полиномов числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой системы:

$$Q(p) = R(p) + S(p).$$

Критерий Гурвица. Из коэффициентов характеристического полинома

$$Q(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$$

составляется определитель n-ого порядка

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix}, \tag{22}$$

который строится следующим образом. На главной диагонали выписываются элементы $a_1, a_2, \dots, a_n$. Затем при движении от этих элементов вверх размещаются коэффициенты в порядке возрастания индексов, при движении вниз - в порядке убывания. Например, при построении i-го столбца, двигаясь от элемента a_i вверх, записывают коэффициенты $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots$, двигаясь вниз, записывают коэффициенты $a_{i-1}, a_{i-2}, \dots$ При этом, если индекс превышает n или принимает отрицательное значение, соответствующий коэффициент принимают равным нулю.

Главные миноры определителя Δ_n

$$\Delta_1 = a_1 \ , \ \Delta_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix} \ , \ \Delta_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix},$$

включая сам определитель Δ_n, называют *определителями Гурвица.*

Критерий Гурвица. *Для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы определители Гурвица, составленные из коэффициентов ее характеристического уравнения, при* $a_0 > 0$ *были больше нуля:*

$$a_0 > 0, \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0.$$

Если необходимое условие устойчивости выполняется, то оказывается, что для определения устойчивости нет необходимости вычислять все определители Гурвица.

Критерий Льенара-Шипара. *При выполнении необходимого условия устойчивости* $(a_0 > 0, \ a_1 > 0, \dots, a_n > 0)$ *для устойчивости системы управления необходимо и достаточно, чтобы все ее определители Гурвица с четными индексами или все ее определители Гурвица с нечетными индексами были положительными:*

$$\Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots \tag{23}$$

или

$$\Delta_3 > 0, \Delta_5 > 0, \dots \tag{24}$$

Для уменьшения вычислений целесообразно при нечетном n использовать условие (23), а при четном n - условие (24).

Пример. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{k}{p^3 + 0,5p^2 + 4p + 1},$$

где $k = 0,5; 2$. Исследовать устойчивость разомкнутой и замкнутой систем.

Решение. Характеристический полином разомкнутой системы имеет вид

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + 0,5\lambda^2 + 4\lambda + 1.$$

Все коэффициенты больше нуля и определитель $\Delta_2 = 0,5 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 1 > 0$. Поэтому разомкнутая система устойчива.

Характеристический полином замкнутой системы

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + 0,5\lambda^2 + 4\lambda + 1 + k.$$

Все коэффициенты этого полинома при обоих значениях k положительны. Определитель Δ_2 при $k = 0,5$ равен

$$\Delta_2 = 0,5 \cdot 4 - 1 \cdot 1,5 = 0,5 > 0,$$

а при $k = 2$

$$\Delta_2 = 0,5 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = -1 < 0.$$

Следовательно, замкнутая система при $k = 0,5$ устойчива, а при $k = 2$ неустойчива.

3.3. **Частотные критерии устойчивости**

Частотными критериями устойчивости называются условия устойчивости, основанные на построении частотных характеристик и так называемой кривой Михайлова.

Выражение

$$Q(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n,$$

которое получается при подстановке $\lambda = j\omega$ в характеристический полином, называется *характеристическим вектором*; переменная ω называется *частотой.*

Принцип аргумента. *Если r нулей полинома $Q(\lambda) = a_0(\lambda)^n + a_1(\lambda)^{n-1} + \ldots + a_n$ расположены в правой полуплоскости, а остальные $n - r$ нулей - в левой полуплоскости, то при изменении частоты ω от 0 до ∞ аргумент вектора $Q(j\omega)$ изменяется на $(n-2r)\frac{\pi}{2}$:*

$$\Delta arg\ Q(j\omega) = (n-2r)\frac{\pi}{2}.$$

Здесь $\Delta arg\ Q(j\omega)$- приращение аргумента $Q(j\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до ∞.

Критерий устойчивости Михайлова. Годограф характеристического вектора, т. е. кривую, которую описывает характеристический вектор при изменении частоты от 0 до ∞, называют *кривой Михайлова.* При $a_n > 0$ кривая Михайлова начинается в положительной вещественной полуоси.

Из принципа аргумента следует, что если все нули характеристического полинома левые, то приращение аргумента характеристического вектора есть $\Delta\ Q(j\omega) = n\frac{\pi}{2}$. Отсюда вытекает следующий критерий устойчивости.

Критерий Михайлова. *Для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы при $a_0 > 0$ ее кривая Михайлова, начинаясь с положительной вещественной полуоси, обходила n квадрантов в положительном направлении (против часовой стрелки).*

Кривые Михайлова устойчивых систем не пересекают начало координат и уходят в бесконечность в n-м квадранте (рис. 20).

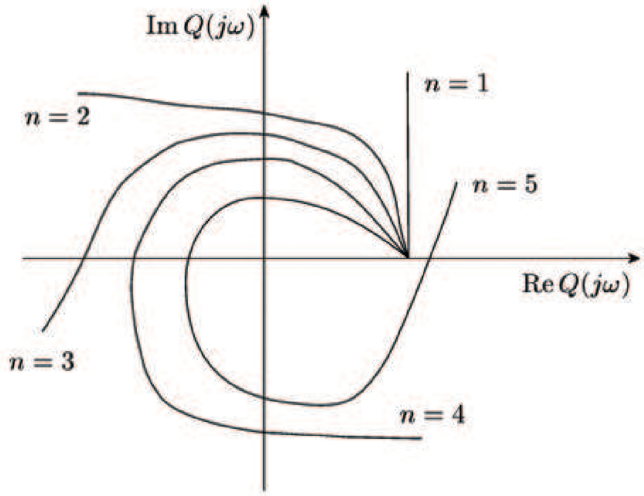


Рис. 20. Кривые Михайлова устойчивых систем

Критерий устойчивости Найквиста. При использовании алгебраических критериев и критерия Михайлова было не важно, устойчивость каких систем - разомкнутых или замкнутых - исследуется. Критерий Найквиста используется для исследования устойчивости замкнутых систем. Он позволяет по амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы судить об устойчивости замкнутой системы.

Критерий Найквиста. *Для того чтобы замкнутая система с отрицательной обратной связью была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) разомкнутой системы охватывала точку $(-1, j0)$ в положительном направлении $r/2$ раз, где r - число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.*

Когда разомкнутая система устойчива, $r = 0$, критерий Найквиста формулируется следующим образом. *Если разомкнутая система устойчива, то для устойчивости замкнутой системы с отрицательной обратной связью необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы не охватывала точку $(-1, j0)$.*

Пример. Исследовать устойчивость замкнутой системы, если передаточная функция разомкнутой системы есть:

$$а)\ W(p) = \frac{5}{p-1}\ ;\ б)\ W(p) = \frac{10}{(p+1)^3}.$$

Решение. Частотные передаточные функции имеют следующий вид:
а)
$$W(j\omega) = \frac{5}{j\omega - 1} = \frac{5(-j\omega - 1)}{1+\omega^2} = U(\omega) + jV(\omega),$$
$$U(\omega) = -\frac{5}{1+\omega^2},\ V(\omega) = -\frac{5\omega}{1+\omega^2};$$
б)
$$W(j\omega) = \frac{10}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + 3j\omega + 1} = \frac{10[1 - 3\omega^2 - j(3\omega - \omega^3)]}{(1-3\omega^2)^2 + (3\omega - \omega^3)^2},$$
$$U(\omega) = \frac{10(1-3\omega^2)}{(1-3\omega^2)^2 + (3\omega-\omega^3)^2}\ ,\ V(\omega) = -\frac{10\omega(3-\omega^2)}{(1-3\omega^2)^2 + (3\omega-\omega^3)^2}.$$

Таблица 6

$W(p) = \frac{5}{p-1}$			
ω	0	$0 < \omega < \infty$	∞
$U(\omega)$	-5	<0	0
$V(\omega)$	0	<0	0

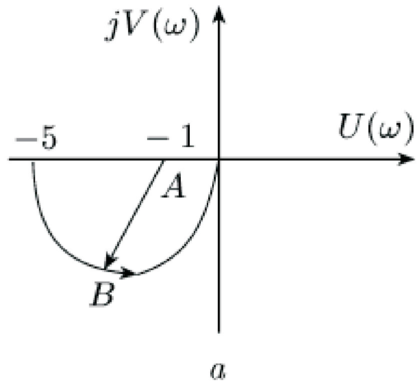
Таблица 7

$W(p) = \frac{10}{(p+1)^3}$							
ω	0	$0 < \omega < \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} < \omega < \sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\omega > \sqrt{3}$	∞
$U(\omega)$	10	>0	0	<0	-1.25	<0	0
$V(\omega)$	0	<0	-6.6	<0	0	>0	0

Для исследования устойчивости АФЧХ можно достаточно точно построить, определив только точки ее пересечения с осями координат. Необходимые расчетные данные приведены в таблицах 6 и 7. На основе этих данных построена АФЧХ (рис. 21). В случае а) характеристический полином разомкнутой системы имеет один правый нуль и АФЧХ $1/2$ раз охватывает точку $(-1, j0)$ в положительном направлении (вектор AB описывает угол π). Следовательно, в этом случае согласно критерию Найквиста замкнутая система устойчива.

В случае б) разомкнутая система устойчива, а ее АФЧХ охватывает точку $(-1, j0)$. Следовательно, в этом случае замкнутая система неустойчива.

Случай наличия нулевых корней. Если характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет нулевые корни, т.е. ее передаточная функция может быть представлена в виде:
$$W(p) = \frac{k}{p^v} W_0(p),$$



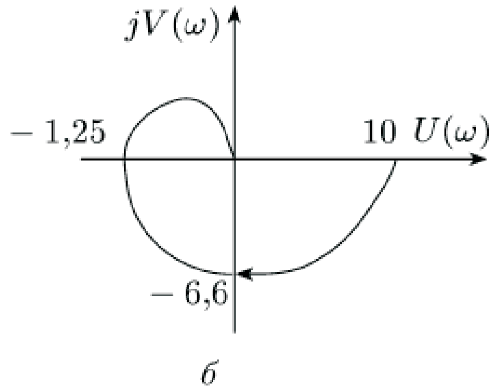


Рис. 21. АФЧХ разомкнутых систем: а) - годограф $W(j\omega) = \frac{5}{j\omega - 1}$; б) - годограф $W(j\omega) = \frac{10}{(j\omega+1)^3}$

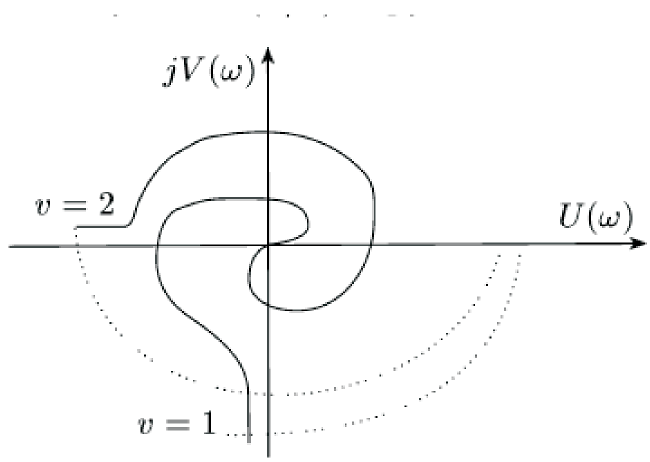


Рис. 22. АФЧХ при нулевых полюсах

где $W_0(0) = 1$, $v \geq 1$, то АФЧХ при $\omega \to 0$ уходит в бесконечность (см. рис. 22). В этом случае АФЧХ дополняется дугой окружности бесконечно большого радиуса (на рис. 22 пунктирные линии), начинающейся на положительной ($k > 0$) либо отрицательной ($k < 0$) действительной полуоси и описывающей угол $v(\frac{\pi}{2})$ по часовой стрелке. Для устойчивости замкнутой системы дополненная АФЧХ должна $r/2$ раз охватывать или при $r = 0$ (разомкнутая система устойчива) не охватывать точку $(-1, j0)$.

Логарифмический частотный критерий устойчивости. В сложных случаях и для получения логарифмического частотного критерия устойчивости удобно воспользоваться другой формулировкой критерия Найквиста, которую мы сейчас и рассмотрим. Если АФЧХ охватывает точку $(-1, j0)$, то она пересекает интервал $(-\infty, -1)$ вещественной оси. Точку пересечения

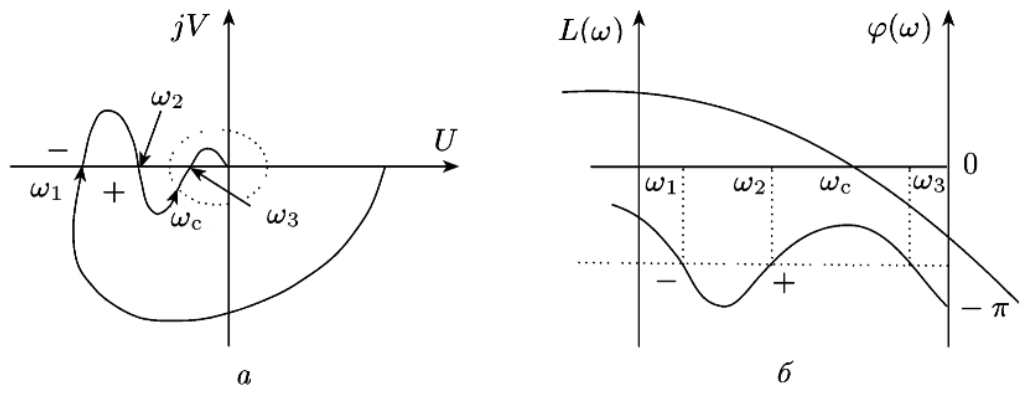


Рис. 23. Положительные и отрицательные переходы: а – АФЧХ; б – ЛАЧХ и ЛФЧХ

АФЧХ с указанным отрезком называют положительным переходом, если пересечение происходит при возрастании частоты сверху вниз (т.е. в положительном направлении), и отрицательным переходом, если пересечение происходит снизу вверх (рис. 23, а). Если АФЧХ начинается или кончается на интервале $(-\infty, -1)$, то говорят о 1/2 - переходе (см. рис. 21, а).

Критерий Найквиста. *Для того чтобы замкнутая система управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разность между положительными и отрицательными переходами была равна $r/2$ (r — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы).*

При пересечении АФЧХ интервала $(-\infty, -1)$ (рис. 23, б) амплитудная частотная функция $A(\omega) > 1$ и соответственно $L(\omega) > 0$, фазовая частотная функция $\varphi(\omega) = \pm(2k+1)\pi$ $(k = 0, 1, 2, ...)$. Поэтому на логарифмических частотных характеристиках (ЛЧХ) положительным переходам соответствуют точки пересечения логарифмической фазовой частотной характеристики (ЛФЧХ) прямой $\varphi(\omega) = \pm(2k+1)\pi$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ снизу вверх (в сторону возрастания) $\varphi(\omega)$, отрицательным переходам — сверху вниз при частотах, когда $L(\omega) > 0$ (рис. 23, б). Поэтому на основании критерия Найквиста получаем следующий критерий устойчивости.

Логарифмический частотный критерий устойчивости. *Для того чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разность между положительными и отрицательными переходами ЛФЧХ прямой $\varphi(\omega) = \pm(2k+1)\pi$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ при частотах, когда $L(\omega) > 0$ (логарифмическая амплитудная частотная характеристика положительна), была равна $r/2$ (r — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы).*

Устойчивость систем с чистым запаздыванием. Системы управления прокатным станом, различные системы управления, содержащие ленточные конвейеры, обладают чистым (или транспортным) запаздыванием.

Передаточная функция в изображениях Лапласа звена чистого запаздывания, как отмечалось, имеет вид:

$$W(p) = ke^{-\tau p}.$$

Рассмотрим замкнутую систему управления, передаточная функция разомкнутой системы которой имеет вид:

$$W_\tau(p) = W(p)e^{-\tau p} \text{ , } W(p) = \frac{R(p)}{S(p)}, \tag{25}$$

где $R(p)$, $S(p)$ - полиномы степени m и n соответственно ($m \leq n$). Для исследования устойчивости такой системы может быть использован критерий Найквиста, формулировка которого практически остается без изменения.

Для того чтобы замкнутая система, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии имеет вид (25), была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы охватывала точку $(-1, j0)$ *в положительном направлении r/2 раз, где r - число правых нулей характеристического полинома разомкнутой системы* $S(p)$.

Замкнутая система без звена чистого запаздывания (при $\tau = 0$) может быть устойчивой, а с возникновением транспортного запаздывания может стать неустойчивой. В этом случае с ростом запаздывания τ АФЧХ будет приближаться к точке $(-1, j0)$, и при некотором значении запаздывания τ_k она пересечет эту точку и окажется на границе устойчивости. Значение τ_k называют *критическим*. Рассмотрим, как можно определить критическое запаздывание.

Частотная передаточная функция, амплитудная и фазовая частотные функции разомкнутой системы имеют вид:

$$W_\tau(j\omega) = W(j\omega) \exp^{-j\tau\omega} \text{ , } W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{S(j\omega)},$$

$$|W_\tau(j\omega)| = |W(j\omega)| \text{ , } \varphi_\tau = \varphi(\omega) - \tau\omega,$$

где $\varphi_\tau(\omega) = argW_\tau(j\omega)$, $\varphi(\omega) = argW(j\omega)$. Отсюда видно, что появление транспортного запаздывания не меняет модуль, а только вносит дополнительный отрицательный фазовый сдвиг - $\omega\tau$, что приводит к закручиванию АФЧХ (рис. 24).

Критическое запаздывание находится из условия:

$$|W(j\omega)| = 1 \text{ , } \varphi(\omega) - \tau_k\omega = -\pi.$$

Решив эту систему, найдем критическое запаздывание и частоту ω_k, которая называется *критической частотой*.

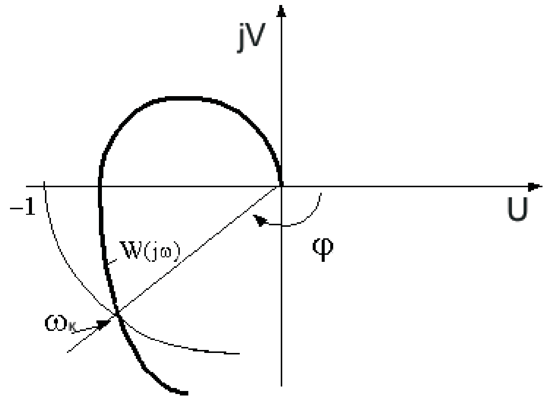


Рис. 24. АФЧХ системы с чистым запаздыванием

3.4. **Области устойчивости**

При заданной структуре какие-либо параметры могут быть нефиксированными, т.е. их можно изменять. Такие параметры называют *варьируемыми.* При наличии варьируемых параметров возникает проблема определения области устойчивости.

Областью устойчивости в пространстве параметров называют множество всех значений варьируемых параметров, при которых система устойчива.

Если существует область устойчивости в пространстве параметров, т.е. существуют такие значения варьируемых параметров, при которых система устойчива, то она называется *структурно устойчивой или структурно устойчивой относительно заданных варьируемых параметров.* В противном случае, т.е. если нет таких значений варьируемых параметров, при которых система устойчива, она называется *структурно неустойчивой или структурно неустойчивой относительно заданных варьируемых параметров.*

Метод D-разбиения. Если имеются варьируемые параметры, то корни характеристического уравнения зависят от этих параметров, и пространство параметров можно разбить на области, которым соответствует фиксированное количество левых корней. Область, которой соответствует k левых корней характеристического уравнения, обозначим $D(k)$. В общем случае все пространство параметров можно разбить на области $D(0), D(1), \ldots, D(n)$. Область $D(n)$ является областью устойчивости, так как при значениях параметров из этой области n корней (т.е. все корни) являются левыми.

Разбиение пространства параметров на все возможные области $D(k)$ называется *D-разбиением.* Кривая, разделяющая области $D(k)$ с различными индексами k, называется *кривой D-разбиения.* Так как во время движения в пространстве параметров при пересечении кривой D-разбиения происходит переход из области $D(k')$ с числом левых корней $k = k'$ в область $D(k'')$ с числом левых корней $k = k''$, то часть левых корней становятся правыми

($k' > k''$) или часть правых корней становятся левыми ($k' < k''$). Но так как переход корней на комплексной плоскости из одной полуплоскости в другую происходит только через мнимую ось (включающую и бесконечно удаленную точку), то уравнение кривой D-разбиения получается из характеристического уравнения $Q(\lambda) = 0$ при подстановке в него $\lambda = j\omega$:

$$Q(j\omega) = 0.$$

Метод D-разбиения. *Методом D-разбиения* называется метод выделения области устойчивости, основанный на D-разбиении, и он включает следующие три операции:

1) D-разбиение пространства параметров;

2) определение среди областей $D(k)$ области, имеющей наибольший индекс. Эта область называется *областью-претендентом*, так как только эта область может быть областью устойчивости;

3) проверка, является ли область-претендент областью устойчивости. Для этого фиксируется какая-либо точка внутри области-претендента и при значении варьируемых параметров, соответствующих фиксированной точке, проверяется устойчивость системы. Если система устойчива, область-претендент является областью устойчивости.

Выделение области устойчивости на плоскости одного параметра. Параметры системы могут принимать только действительные значения, и пространство параметров в случае одного варьируемого параметра представляет собой прямую, а область устойчивости - интервал. При выделении интервала устойчивости методом D-разбиения, предполагая, что параметр принимает комплексные значения, сначала находят область устойчивости на комплексной плоскости. Затем, выделяя вещественную часть, находят интервал устойчивости.

Пусть варьируемый параметр μ входит линейно в характеристическое уравнение $Q(\lambda) = S(\lambda) + \mu R(\lambda) = 0$ ($S(\lambda), R(\lambda)$ - полиномы от λ). Для получения уравнения кривой D-разбиения сделаем подстановку $\lambda = j\omega$ и разрешим его относительно параметра μ, обозначив его, когда он принимает комплексное значение, через $\widetilde{\mu}$ ($\widetilde{\mu} = \mu + j\mu'$):

$$\widetilde{\mu} = \frac{-S(j\omega)}{R(j\omega)} = u(\omega) + jv(\omega),$$

или

$$\mu = u(\omega)\ ,\ \mu' = v(\omega).$$

Здесь $u(\omega)$ является четной, а $v(\omega)$ нечетной функцией от ω. Поэтому для построения кривой D-разбиения, которая строится при изменении ω от $-\infty$ до ∞, достаточно построить кривую D-разбиения при изменении ω от 0 до ∞, а затем для получения кривой, соответствующей отрицательным ω, зеркально отобразить ее относительно вещественной оси.

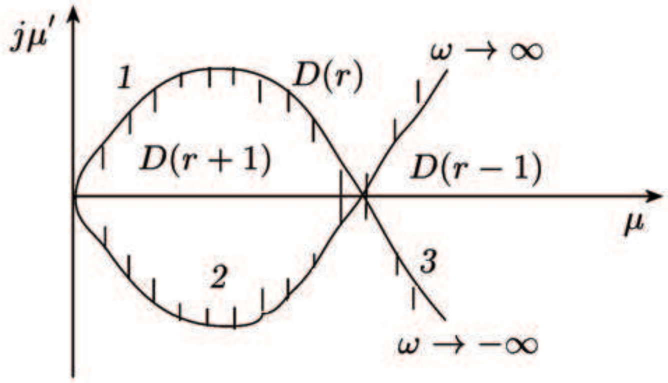


Рис. 25. Выделение области устойчивости на плоскости одного параметра

Для выделения области-претендента кривую D-разбиения штрихуют слева при движении по ней в сторону возрастания ω (см. рис. 25). При пересечении кривой со стороны штриховки один левый корень становится правым, а при пересечении с обратной стороны один правый корень становится левым. Поэтому если, например, область 1 (см. рис. 25) принять за область $D(r)$, то область 2 будет областью $D(r+1)$ и область 3 - областью $D(r-1)$. Следовательно, областью-претендентом будет область 2.

4. КАЧЕСТВО СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Помимо требования устойчивости, к системе управления предъявляются определенные требования по ее качеству. Под качеством системы управления понимается совокупность требований, которые прямо или косвенно характеризуют точность ее работы.

Наиболее полной характеристикой качества системы управления является ошибка (см. рис. 26)

$$e(t) = g(t) - y(t).$$

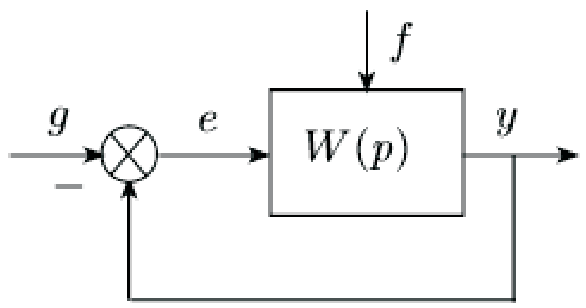


Рис. 26. Схема приложения возмущения

Так как $y(t) = W_{yg}(s)g(t) + W_{yf}(s)f(t)$, где $W_{yg}(s)$ и $W_{yf}(s)$ – передаточные функции относительно выхода y и входов g и f соответственно, то

$$e(t) = g(t) - y(t) = W_{eg}(s)g(t) - W_{yf}(s)f(t). \tag{26}$$

Здесь $W_{eg}(s) = 1 - W_{yg}(s)$–передаточная функция относительно выхода e и входа g, которая называется передаточной функцией ошибки по задающему воздействию.

Используя передаточную функцию $W_{ef}(s)$ относительно выхода e и входа f, называемую передаточной функцией ошибки по возмущению, формулу (26) можно записать в виде

$$e(t) = W_{eg}(s)g(t) + W_{ef}(s)f(t).$$

Данная формула определяет ошибку только в том случае, когда возмущение f приложено не на входе сравнивающего устройства. Только в этом случае $W_{ef}(s) = -W_{yf}(s)$. Если возмущение приложено на входе сравнивающего устройства, то для определения ошибки нужно пользоваться формулой (26). Из вышеприведенных формул следует, что ошибку можно представить в виде суммы

$$e(t) = e_g(t) + e_f(t),$$

где

$$e_g(t) = W_{eg}(s)g(t), \quad e_f(t) = W_{ef}(s)f(t),$$

или, если возмущение приложено на входе сравнивающего устройства,

$$e_f(t) = -W_{yf}(s)f(t).$$

Первая составляющая $e_g(t)$ называется *ошибкой от задающего воздействия*, вторая составляющая – *ошибкой от возмущения.* Если на систему действует несколько возмущений, то ошибка от возмущений будет равна сумме ошибок от каждого возмущения.

Ошибка $e(t)$, являясь функцией от времени, не очень удобна для оценки качества систем управления. Поэтому на практике при оценке качества чаще используют числовые показатели, которые прямо или косвенно характеризуют точность воспроизведения заданного движения.

Показатели качества делятся на показатели качества в переходном режиме и показатели качества в установившемся режиме.

О качестве системы управления имеет смысл говорить, если она устойчива. Поэтому показатели качества определяют при предположении, что система устойчива.

Ошибка $e(t)$ зависит как от свойства системы управления (т. е. от уравнения), так и от внешнего воздействия.

По этой причине показатели качества как характеристики свойства системы определяют при определенных внешних воздействиях, называемых *типовыми.* При оценке качества в переходном режиме в качестве типового воздействия используют ступенчатую функцию $A \cdot \mathbf{1}(t)$ (A — константа), а при оценке качества в установившемся режиме — полиномы времени $t: At, At^2, \ldots$

4.1. **Показатели качества в переходном режиме**

Показатели качества в переходном режиме делятся на прямые и косвенные показатели. Последние делятся на корневые, частотные и интегральные.

Прямые показатели качества. При определении показателей качества в переходном режиме в качестве типового воздействия используется ступенчатое воздействие $A\mathbf{1}(t)$. Характер переходного процесса не зависит от величины A. Реакция системы y(t) на входное воздействие $A\mathbf{1}(t)$ пропорциональна переходной функции $h(t)$, являющейся реакцией системы на единичное ступенчатое воздействие $1(t): y(t) = Ah(t)$. Поэтому обычно принимают $A = 1$.

При ступенчатом воздействии ошибка

$$e(t) = \mathbf{1}(t) - h(t)$$

отличается от переходной функции на постоянную величину. Поэтому при оценке качества в переходном режиме вместо ошибки также используют переходную функцию.

Прямыми показателями качества называются показатели, которые получаются непосредственно по переходной характеристике. Из прямых показателей качества наиболее часто используют время регулирования и перерегулирование.

Временем регулирования (или длительностью переходного процесса) t_p называется минимальное время, по истечении которого (с момента подачи ступенчатого воздействия) отклонение выходной величины от установившегося значения $h(\infty)$ не превышает некоторой заданной величины $\triangle$:

$$t_p = \min_{T_p}\{T_p : |h(t) - h(\infty)| \leq \triangle, t \geq T_p\}.$$

Обычно принимают $\triangle = (0.05 \div 0,1)h(\infty)$. Время регулирования характеризует быстродействие системы.

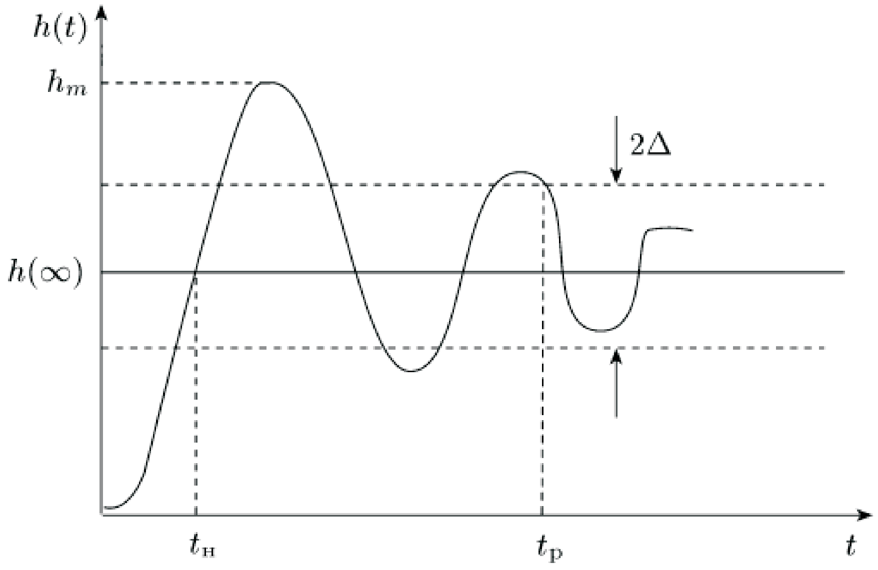


Рис. 27. Переходная характеристика

Перерегулирование обозначают через σ и определяют следующим образом:

$$\sigma = \frac{h_m - h(\infty)}{h(\infty)} 100\%,$$

где h_m — максимальное значение переходной функции.

Иначе говоря, *перерегулированием* называется максимальное отклонение переходной функции от установившегося значения $h(\infty)$, выраженное в процентах по отношению к $h(\infty)$.

Допустимое перерегулирование определяется конкретными условиями работы и назначением САУ. Для систем, работающих при задающих воздействиях, обычно допускают $\sigma = 18...25\%$. Для систем поддержания заданного значения регулируемой величины, работающих при возмущающих воздействиях, значения σ могут достигать гораздо больших величин.

Колебательность характеризуется обычно числом колебаний переходной характеристики за время переходного процесса. В зависимости от характера затухания различают следующие типы переходных характеристик: монотонная (нет ни одного колебания); апериодическая (не более одного колебания); колебательная (несколько колебаний).

Иногда также рассматривают время нарастания t_n — время первого достижения установившегося значения (см. рис. 27).

Косвенные показатели качества. Исчерпывающее представление о качестве переходного процесса дает, естественно, сама кривая процесса. Однако при разработке САУ необходимо иметь возможность судить об основных показателях качества переходного процесса без построения их кривых, по каким-либо косвенным признакам, которые определяются более просто и, кроме того, позволяют связать показатели качества непосредственно со значениями параметров САУ.

Корневые показатели. В качестве корневых показателей используют *степень устойчивости и степень колебательности.*

Степенью устойчивости η системы управления (или характеристического полинома) называют расстояние от мнимой оси до ближайшего корня ее характеристического уравнения (рис. 28, а):

$$\eta = \min_{\nu} |Re\lambda_{\nu}|.$$

Степень устойчивости характеризует быстродействие системы. Это связано с тем, что быстрота затухания переходного процесса определяется вещественной частью корня, наиболее близко расположенного к мнимой оси.

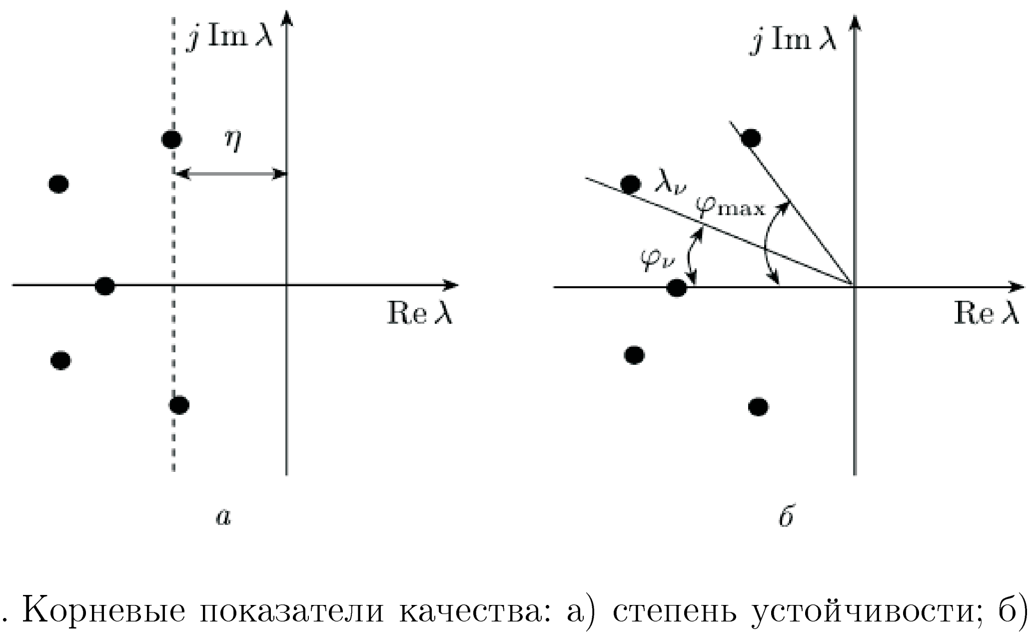


Рис. 28. Корневые показатели качества: а) степень устойчивости; б) степень колебательности

Обозначим через φ_{ν} угол, образованный отрицательной вещественной полуосью и прямой, проведенной из начала координат к ν-му корню (рис.28,б).

Тогда *степень колебательности системы* (или ее характеристического полинома) можно определить следующим образом:

$$\mu = \max_{\nu} tg\varphi_{\nu} = tg\varphi_{\max}.$$

Степень колебательности косвенно характеризует колебательность системы. При одинаковой степени устойчивости число колебаний за время регулирования будет больше у той системы, у которой больше степень колебательности.

При исследовании степени устойчивости удобно воспользоваться следующим преобразованием. Исходный характеристический полином

$$Q(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$$

преобразуем, сделав подстановку $\lambda = q - c$. Тогда получим

$$\widetilde{Q}(q) = Q(\lambda)|_{\lambda=q-c} = \widetilde{a}_0 q^n + \widetilde{a}_1 q^{n-1} + \ldots + \widetilde{a}_n,$$

где

$$\widetilde{a}_k = \frac{1}{(n-k)!} \frac{\partial^{n-k} Q(\lambda)}{\partial \lambda^{n-k}}\bigg|_{\lambda=-c}.$$

Преобразование $\lambda = q - c$ соответствует сдвигу мнимой оси влево на c, и преобразованный полином $\widetilde{Q}(q)$ будет устойчивым полиномом, если $c < \eta$ (η - степень устойчивости исходного полинома), и неустойчивым полиномом, если $c > \eta$. Поэтому исследование степени устойчивости полинома $Q(\lambda)$ сводится к исследованию устойчивости преобразованного полинома $\widetilde{Q}(q)$.

Частотные показатели качества. В качестве частотных показателей качества используют резонансный пик, полосу пропускания, запас устойчивости по фазе и запас устойчивости по амплитуде.

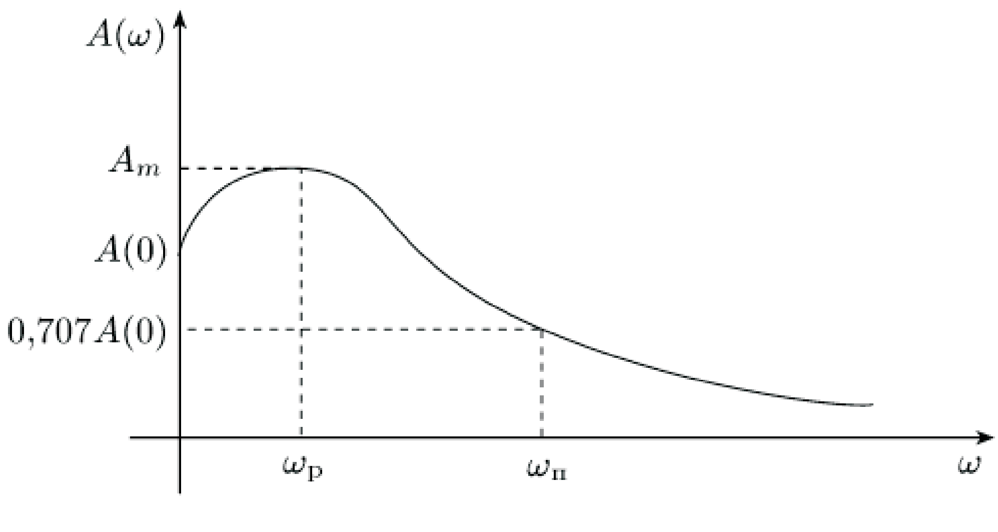


Рис. 29. Амплитудная частотная характеристика

Резонансный пик и полосы пропускания определяются по амплитудной частотной характеристике (рис. 29). *Резонансным пиком или показателем колебательности* называется отношение максимального значения A_m к начальному значению $A(0)$: $M = \frac{A_m}{A(0)}$.

В большинстве систем управления считается желательным, чтобы резонансный пик находился в пределах от $1,1$ до $1,5$.

Частота ω_p, при которой $A(\omega)$ достигает максимального значения ($A_m = A(\omega_p)$), называется *резонансной частотой.*

Полосой пропускания называют диапазон частот $(0; \omega_{\Pi})$, где ω_{Π} — частота, при которой $A(\omega_{\Pi})$ принимает значение $0,707A(0)$.

Запасы устойчивости по фазе и амплитуде характеризуют близость системы к границе устойчивости и определяются по амплитудно-фазовой частотной характеристике (АФЧХ) и логарифмическим частотным характеристикам (ЛЧХ) разомкнутой системы.

По АФЧХ запас устойчивости по амплитуде L_y и запас устойчивости по фазе φ_y определяются следующим образом. Пусть АФЧХ пересекает окружность единичного радиуса при частоте ω_c, а отрицательную вещественную полуось при частоте ω_π (рис. 30, а).

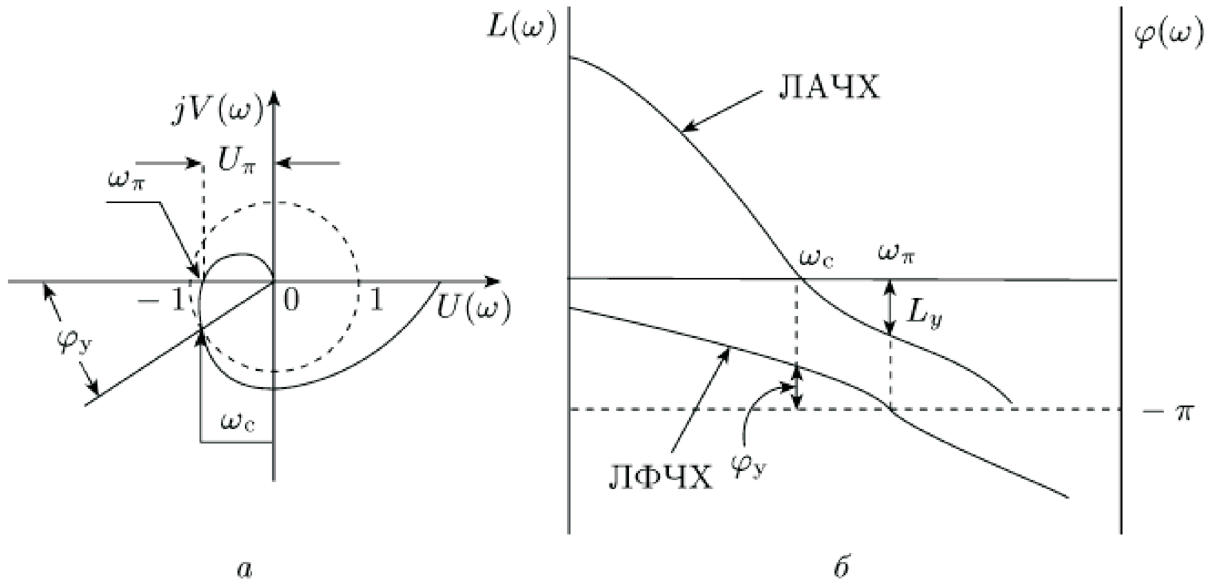


Рис. 30. Частотные характеристики разомкнутой системы: а — АФЧХ; б — ЛАЧХ и ЛФЧХ

Запас устойчивости по амплитуде $L_y = 20lg\frac{1}{U_\pi}$ ($U_\pi = |U(\omega_\pi)|$) и запас устойчивости по фазе $\varphi_y = \pi + \varphi(\omega_c)$. Определение запасов устойчивости по ЛЧХ показано на рис. 30, б.

Интегральные показатели качества. Широкое применение на практике получили интегральные показатели качества. Ошибку системы можно представить в виде суммы:

$$e(t) = e_n(t) + e_\infty,$$

где $e_n(t)$ — переходная составляющая ошибки, e_∞ — установившаяся ошибка.

В качестве интегральных оценок наиболее часто используют интегральную квадратическую ошибку:

$$I_{20} = \int\limits_0^\infty e_n^2(t)dt,$$

(которую также называют *интегральной квадратической оценкой) и обобщенные интегральные квадратические оценки*:

$$I_{2k} = \int\limits_0^\infty [e_n^2(t) + \tau_1^2 \dot{e}_n^2(t) + \ldots + \tau_k^2 {e_n^{(k)}}^2(t)]dt, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

где τ_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ - весовые константы.

Рассмотрим, в чем смысл этих показателей. Сделаем это сначала на примере показателя I_{21}, представив его в виде:

$$I_{21} = \int\limits_0^\infty [e_n(t) + \tau\dot{e}_n(t)]^2 dt - 2\tau \int\limits_0^\infty e_n(t)\dot{e}_n(t)dt.$$

Учитывая, что $e_n(\infty) = 0$ и

$$\int\limits_0^\infty e_n(t)\dot{e}_n(t)dt = \int\limits_0^\infty e_n(t)d(e_n(t)) = -\frac{1}{2}e_n^2(0),$$

имеем

$$I_{21} = \int\limits_0^\infty [e_n(t) + \tau\dot{e}_n(t)]^2 dt + \tau e_n^2(0).$$

Отсюда следует, что I_{21} достигает минимума, если $e_n(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\tau\dot{e}_n(t) + e_n(t) = 0.$$

Таким образом, минимизация I_{21} соответствует приближению переходной составляющей ошибки к решению этого дифференциального уравнения.

Аналогично можно показать, что интегральный показатель I_{2k} достигает минимума, если $e_n(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению :

$$\tau_k e_n^{(k)}(t) + \tau_{k-1} e_n^{(k-1)}(t) + \ldots + e_n(t) = 0.$$

Равенство Парсеваля. *Если $X(p)$ является изображением Лапласа функции $x(t)$ и его полюсы расположены в левой полуплоскости, то справедливо равенство Парсеваля:*

$$\int_0^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega.$$

Вычисление интегральных оценок. На основе равенства Парсеваля имеем:

$$I_{20} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |E_n(j\omega)|^2 d\omega,$$

$$I_{2k} = \frac{1}{2\pi}[\int_{-\infty}^{\infty} |E_n(j\omega)|^2 d\omega + \tau_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{E}_n(j\omega)|^2 d\omega + \ldots + \tau_k^2 \int_{-\infty}^{\infty} |E_n^{(k)}(j\omega)|^2 d\omega],$$

где $E_n(p) = L\{e_n(t)\},\ \dot{E}_n(p) = L\{\dot{e}_n(t)\}, \ldots, E_n^{(k)}(p) = L\{e_n^{(k)}(t)\}$. Так как

$$\dot{E}_n(p) = L\{\dot{e}_n(t)\} = pE_n(p) - e_n(0),$$

то формулу для I_{21} можно записать в виде :

$$I_{21} = \frac{1}{2\pi}[\int_{-\infty}^{\infty} |E_n(j\omega)|^2 d\omega + \tau^2 \int_{-\infty}^{\infty} |j\omega E_n(j\omega) - e_n(0)|^2 d\omega].$$

Аналогичным образом можно представить формулы и для I_{2k} $(k = 2, 3, \ldots, m)$.

Определение интегральных показателей сводится к вычислению интегралов вида:

$$I_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{b_0(j\omega)^{n-1} + b_1(j\omega)^{n-2} + \ldots + b_{n-1}}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n}\right|^2 d\omega.$$

Этот интеграл вычисляется с помощью теории вычетов и для $n = 1, 2, 3$ имеет следующий вид:

$$n = 1 : I_1 = \frac{b_0^2}{2a_0a_1};$$

$$n = 2 : I_2 = \frac{b_0^2 a_2 + b_1^2 a_0}{2a_0a_1a_2};$$

$$n = 3 : I_3 = \frac{b_0^2 a_2 a_3 + (b_1^2 - 2b_0b_1)a_0a_3 + b_2^2 a_0 a_1}{2a_0a_3(a_1a_2 - a_0a_3)}.$$

Интегральные критерии качества используются для определения оптимальных значений варьируемых параметров по минимуму значения соответствующей интегральной оценки. Например, минимизируя I_{21}, мы стремимся получить быстрый (первая составляющая) и плавный (вторая составляющая) переходной процесс.

4.2. **Показатели качества в установившемся режиме**

Наиболее полной характеристикой качества системы в установившемся режиме является установившаяся ошибка. Когда внешние воздействия являются функциями времени, установившаяся ошибка как вынужденная составляющая ошибки также является функцией времени. Поэтому в общем случае установившуюся ошибку будем обозначать $e_{\text{В}}(t)$. Установившаяся ошибка определяется следующим образом:

$$e_{\text{В}}(t) = \lim_{t\to\infty} e(t).$$

Если на систему действуют два внешних воздействия — задающие воздействия $g(t)$ и возмущения $f(t)$, то установившуюся ошибку можно представить в виде суммы:

$$e_{\text{В}}(t) = e_{\text{В}g}(t) + e_{\text{В}f}(t),$$

где $e_{\text{В}g}(t)$ и $e_{\text{В}f}(t)$-установившиеся ошибки от задающего воздействия $g(t)$ и возмущения $f(t)$ соответственно.

Коэффициенты ошибок. Числовыми показателями качества в установившемся режиме являются коэффициенты ошибок, которые определяются следующим образом. Установившуюся ошибку $e_{\text{В}g}(t)$ можно представить в виде ряда:

$$e_{\text{В}g}(t) = C_{g0}g(t) + C_{g1}\frac{dg(t)}{dt} + \ldots,$$

где

$$C_{g0} = W_{eg}(0),\ C_{gi} = \frac{1}{i!}\frac{d^iW_{eg}(p)}{dp^i}|_{p=0},\quad i = 1, 2, \ldots$$

Здесь $W_{eg}(p)$ — передаточная функция относительно входа $g(t)$ и выхода e(t). Коэффициенты C_{gk} $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ называются коэффициентами ошибки по задающему воздействию.

Аналогично можно представить установившуюся ошибку $e_{\text{В}f}(t)$:

$$e_{\text{В}f}(t) = C_{f0}f(t) + C_{f1}\frac{df(t)}{dt} + \ldots,$$

где

$$C_{f0} = W_{ef}(0),\ C_{fi} = \frac{1}{i!}\frac{d^iW_{ef}(p)}{dp^i}|_{p=0},\quad i = 1, 2, \ldots$$

Здесь $W_{ef}(p)$ — передаточная функция относительно входа $f(t)$ и выхода e(t). Коэффициенты C_{fk} $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ называются коэффициентами ошибки по возмущению.

Первые три коэффициента ошибок имеют специальные названия:
C_{g0}, C_{f0}—коэффициенты позиционной ошибки;
C_{g1}, C_{f1}—коэффициенты скоростной ошибки;
C_{g2}, C_{f2}—коэффициенты ошибки по ускорению.

4.3. **Статические и астатические системы**

Установившаяся ошибка при постоянном внешнем воздействии называется *статической ошибкой.*

Система называется *статической*, если статическая ошибка отлична от нуля, и *астатической*, если статическая ошибка равна нулю.

Можно говорить о статической и астатической системах относительно того или иного внешнего воздействия.

Система называется *статической относительно задающего воздействия (возмущения)*, если статическая ошибка от задающего воздействия (возмущения) отлична от нуля, и *астатической относительно задающего воздействия (возмущения)*, если статическая ошибка от задающего воздействия (возмущения) равна нулю. При постоянных g и f имеем

$$e_{\text{В}g}(t) = e_{g\infty} = C_{g0}g, C_{g0} = W_{eg}(0);$$

$$e_{\text{В}f}(t) = e_{f\infty} = C_{f0}f, C_{f0} = W_{ef}(0).$$

Отсюда следует, что система будет статической относительно воздействия $g(t)$ (возмущения $f(t)$), если $C_{g0} \neq 0, (C_{f0} \neq 0)$, и астатической относительно задающего воздействия $g(t)$ (возмущения $f(t)$), если $C_{g0} = 0, (C_{f0} = 0)$.

Астатическая система относительно задающего воздействия обладает *астатизмом r-го порядка*, если

$$C_{go} = C_{g1} = \ldots = C_{gr-1} = 0,\ C_{gr} \neq 0.$$

Аналогично определяется астатическая система с астатизмом r-го порядка относительно возмущения.

Если система обладает астатизмом r-го порядка, то коэффициенты ошибок C_{gi} (C_{fi}) при $i = 1, 2, ..., r$ можно определить следующим образом:

$$C_{gi} = \left.\frac{W_{eg}(p)}{p^i}\right|_{p=0} \quad \left(C_{fi} = \left.\frac{W_{ef}(p)}{p^i}\right|_{p=0}\right).$$

Выясним, какой же должна быть структура астатической системы управления. Рассмотрим систему управления с двумя входами (рис. 31). Пусть пе-

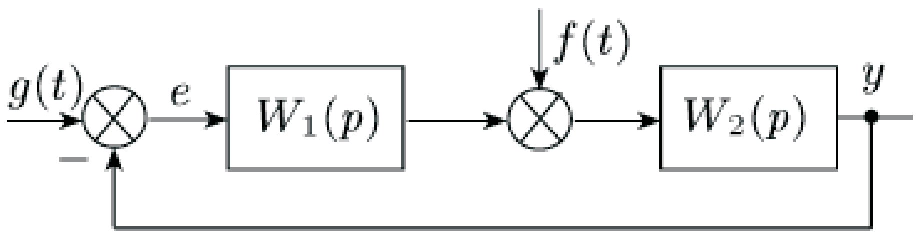


Рис. 31. Типовая схема системы управления

редаточные функции $W_1(p)$ и $W_2(p)$ имеют вид:

$$W_1(p) = \frac{R_1(p)}{S_1(p)}, \quad W_2(p) = \frac{R_2(p)}{S_2(p)}.$$

Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W(p) = W_1(p)W_2(p) = \frac{R(p)}{S(p)},$$

где $R(p) = R_1(p)R_2(p), S(p) = S_1(p)S_2(p)$.

Передаточная функция ошибки по задающему воздействию имеет вид:

$$W_{eg}(p) = \frac{1}{1 + W(p)} = \frac{S(p)}{S(p) + R(p)}.$$

Для того чтобы система управления была астатической с астатизмом $r-$ порядка относительно задающего воздействия, передаточная функция $W_{eg}(p)$ должна иметь вид:

$$W_{eg}(p) = p^r W_0(p), \quad W_0(0) \neq 0.$$

А это возможно, если передаточную функцию разомкнутой системы можно представить в виде:

$$W(p) = \frac{k}{p^r} W_0(p), W_0(0) = \frac{R_0(0)}{S_0(0)} = 1.$$

Передаточная функция разомкнутой системы имеет такой вид, если система содержит r последовательно соединенных интегрирующих звеньев.

Интегрирующие звенья должны быть включены в основной контур, а не в контур, образованный местной обратной связью.

Таким образом, *для того чтобы система управления была астатической с астатизмом $r-$ порядка относительно задающего воздействия, нужно, чтобы она содержала r последовательно соединенных интегрирующих звеньев.*

Передаточная функция ошибки по возмущению имеет вид:

$$W_{ef}(p) = \frac{-W_2(p)}{1 + W(p)} = \frac{-R_2(p)S_1(p)}{S_1(p)S_2(p) + R_1(p)R_(p)}.$$

Отсюда делаем вывод: *для того чтобы система управления была астатической с астатизмом $r-$ порядка относительно возмущения, нужно, чтобы она содержала r последовательно соединенных интегрирующих звеньев, включенных между точкой съема ошибки e и точкой приложения возмущения f.*

5. СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

5.1. Основные понятия синтеза

В теории управления основными задачами, которые в ней рассматриваются, являются задачи анализа и синтеза. Задача анализа сводится к исследованию устойчивости и качества системы управления. Задача же синтеза формируется следующим образом:

— задана структура системы управления и по заданным показателям качества требуется определить ее параметры;

— задан объект управления и требуется по заданным показателям качества определить алгоритм управления.

В общем случае при проектировании системы необходимо определить алгоритмическую и функциональную структуры системы, т. е. решить задачу полного синтеза. Определение алгоритмической структуры (теоретический синтез) производится с помощью математических методов и на основании требований, записанных в четкой математической форме. Определение функциональной структуры (технический синтез) заключается в выборе конкретных физических элементов и согласования их между собой по статическим и динамическим характеристикам. Эта процедура не имеет пока строгой математической основы (т.е. не формализована) и поэтому относится к области инженерного творчества. С учетом того, что не любой элемент алгоритмической структуры может иметь отображение в виде физического блока функциональной структуры, т.е. просто не может быть реализован, задачу синтеза в большинстве случаев невозможно решать, определяя сначала алгоритмическую структуру САУ, а затем по ней - функциональную структуру. Поэтому задачу синтеза в большинстве случаев решают следующим образом. Сначала, исходя из известности объекта управления ОУ, требований к назначению и условиям работы АСУ, по каталогам серийного оборудования выбирают функционально необходимые элементы системы: регулирующий орган, исполнительное устройство, датчики. Эти элементы САУ вместе с объектом управления образуют неизменяемую часть функциональной структуры системы. Затем, на основании требований к статическим и динамическим свойствам САУ, определяют изменяемую часть функциональной структуры системы, в которую входят: усилительно-преобразующее устройство, корректирующие устройства.

Таким образом, процедуры определения алгоритмической и функциональной структур тесно переплетаются друг с другом. Окончательное решение о структуре САУ принимается на основе компромисса между качеством управления, с одной стороны, и простотой и надежностью, с другой.

Заключительным этапом проектирования САУ является параметрическая оптимизация - определение настроечных параметров выбранного регулятора. После решения задачи синтеза обычно выполняют анализ синтезированной системы, т.е. методами, изложенными в предыдущих главах, проверяют, обладает ли система необходимыми показателями устойчивости и качества управления.

Применение на всех этапах синтеза и анализа САУ цифровых вычислительных машин позволяет рассмотреть большое количество вариантов структур и параметров и тем самым существенно ускорить решение задачи синтеза.

5.2. **Исследование типовых законов управления**

В качестве примера мы рассмотрим влияние типовых законов управления на устойчивость и качество системы управления, приведенной на рис. 32.

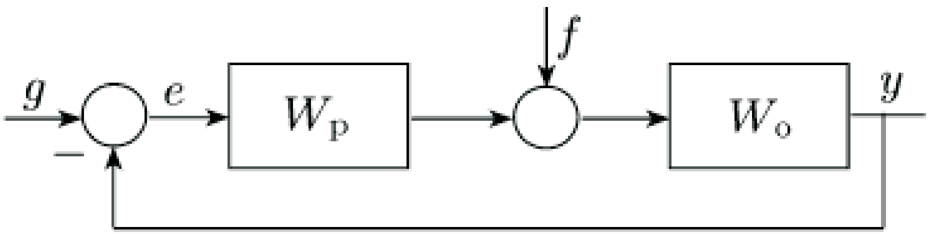


Рис. 32. Типовая схема системы управления

П-закон. При П-законе передаточная функция регулятора $W_p(P) = k_\Pi$, передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W(p) = W_p(p)W_0(p) = \frac{k_\Pi}{T^2p^2 + 2\xi Tp + 1}.$$

Характеристическое уравнение

$$T^2\lambda^2 + 2\xi T\lambda + 1 + k_\Pi = 0$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - (1 + k_\Pi)}}{T}.$$

Отсюда видно, что если объект управления является колебательным звеном $0 < \xi < 1$, то замкнутая система при любом $k_\Pi > 0$ является также колебательным звеном, и степень колебательности $\mu = \frac{\sqrt{k_\Pi + 1 - \xi^2}}{\xi}$ с ростом k_Π возрастает.

Передаточные функции ошибки по задающему воздействию и по возмущению имеют вид:

$$W_{eg}(p) = \frac{1}{1 + W(p)} = \frac{T^2p^2 + 2\xi Tp + 1}{T^2p^2 + 2\xi Tp + 1 + k_\Pi},$$

$$W_{ef}(p)=\frac{-W_0(p)}{1+W(p)}=\frac{-1}{T^2p^2+2\xi Tp+1+k_\text{П}},$$

и для коэффициентов позиционной ошибки имеем:

$$C_{g0}=W_{eg}(0)=\frac{1}{1+k_\text{П}},\quad C_{f0}=W_{ef}(0)=\frac{-1}{1+k_\text{П}}.$$

Отсюда видно, что при П-регуляторе рассматриваемая система является статической, и статическая ошибка убывает с ростом $k_\text{П}$. Однако начиная с $k_\text{П}=\xi^2-1$ с ростом $k_\text{П}$ увеличивается степень колебательности.

Таким образом, можно сделать вывод: с увеличением $k_\text{П}$ качество системы в установившемся режиме улучшается, а в переходном режиме ухудшается.

ПИ-закон. В этом случае $W_p(p)=k_\text{П}+\frac{k_\text{И}}{p}$, передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W(p)=W_p(p)W_0(p)=\frac{k_\text{П}p+k_\text{И}}{p(T^2p^2+2\xi Tp+1)},$$

и характеристическое уравнение имеет вид:

$$T^2\lambda^3+2\xi T\lambda^2+(1+k_\text{П})\lambda+k_\text{И}=0.$$

Коэффициенты этого уравнения положительны, определитель Гурвица 2-го порядка

$$\Delta_2=2\xi T(1+k_\text{П})-T^2k_\text{И}$$

при $k_\text{И}<\frac{2\xi}{T}(1+k_\text{П})$ больше нуля и система устойчива, а при $k_\text{И}\ge\frac{2\xi}{T}(1+k_\text{П})$ меньше или равен нулю и система неустойчива. Следовательно, увеличение коэффициента при интегральном члене приводит к неустойчивости системы. С увеличением $k_\text{И}$ в области устойчивости запасы устойчивости убывают, а степень колебательности увеличивается.

Так как передаточные функции ошибки имеют вид:

$$W_{eg}(p)=\frac{1}{1+W(p)}=\frac{p(T^2p^2+2\xi Tp+1)}{p(T^2p^2+2\xi Tp+1)+k_\text{П}p+k_\text{И}},$$

$$W_{ef}(p)=\frac{-W_0(p)}{1+W(p)}=\frac{-p}{p(T^2p^2+2\xi Tp+1)+k_\text{П}p+k_\text{И}},$$

то коэффициенты ошибок имеют вид:

$$C_{g0}=W_{eg}(0)=0,\ C_{g1}=\left.\frac{W_{eg}(p)}{p}\right|_{p=0}=\frac{1}{k_\text{И}},$$

$$C_{f0}=W_{ef}(0)=0,\ C_{f1}=\left.\frac{W_{ef}(p)}{p}\right|_{p=0}=-\frac{1}{k_\text{И}}.$$

При включении интегрального слагаемого в закон управления система становится астатической, и с увеличением $k_\text{И}$ уменьшается скоростная ошибка. Однако при этом ухудшается качество системы в переходном режиме, и с определенного $k_\text{И}$ система становится неустойчивой.

ПД-закон. При этом законе $W_p(p) = k_\text{П} + k_\text{Д}p$, а передаточная функция разомкнутой системы:

$$W(p) = W_p(p)W_0(p) = \frac{k_\text{П} + k_\text{Д}p}{T^2p^2 + 2\xi Tp + 1}$$

и характеристическое уравнение имеет вид:

$$T^2\lambda^2 + (2\xi T + k_\text{Д})\lambda + 1 + k_\text{П} = 0.$$

Корнями этого уравнения являются:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(k_\text{Д} + 2\xi T) \pm \sqrt{(k_\text{Д} + 2\xi T)^2 - 4T^2(1 + k_\text{П})}}{2T^2}.$$

Когда подкоренное выражение неотрицательно, т.е.

$$(k_\text{Д} + 2\xi T)^2 - 4T^2(1 + k_\text{П}) \geq 0$$

или

$$k_\text{Д} \geq 2T(\sqrt{k_\text{П} + 1} - \xi),$$

система управления является апериодическим звеном 2-го порядка. Если выполняется противоположное неравенство, т.е.

$$k_\text{Д} < 2T(\sqrt{k_\text{П} + 1} - \xi), \tag{27}$$

то система является колебательным звеном, а степень устойчивости η и степень колебательности ν соответственно принимают вид:

$$\eta = \frac{k_\text{Д} + 2\xi T}{2T^2}, \quad \mu = \sqrt{\frac{4T^2(k_\text{П} + 1)}{(k_\text{Д} + 2\xi T)^2} - 1}.$$

Следовательно, при выполнении условия (27) с ростом $k_\text{Д}$ степень устойчивости возрастает, а степень колебательности убывает.

Передаточные функции ошибки имеют вид:

$$W_{eg}(p) = \frac{1}{1 + W(p)} = \frac{T^2p^2 + 2\xi Tp + 1}{T^2p^2 + (2\xi T + k_\text{Д})p + 1 + k_\text{П}},$$

$$W_{ef}(p) = \frac{-W_0(p)}{1 + W(p)} = \frac{-1}{T^2p^2 + (2\xi T + k_\text{Д})p + 1 + k_\text{П}},$$

и для коэффициентов позиционной ошибки имеем:

$$C_{g0} = W_{eg}(0) = \frac{1}{1 + k_\text{П}}, \quad C_{f0} = W_{ef}(0) = \frac{-1}{1 + k_\text{П}}.$$

Таким образом, введение в закон управления дифференцирующего члена улучшает качество системы в переходном режиме. На качество системы в установившемся режиме (при постоянных внешних воздействиях) он никакого влияния не оказывает. Но следует иметь в виду, что при чрезмерном увеличении $k_\text{Д}$ качество системы в переходном режиме может ухудшиться.

ПИД-закон. В этом случае $W_p(p) = k_{\text{П}} + k_{\text{Д}}p + \frac{k_{\text{И}}}{p}$, передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W(p) = W_p(p)W_0(p) = \frac{k_{\text{П}}p + k_{\text{Д}}p^2 + k_{\text{И}}}{(T^2p^2 + 2\xi Tp + 1)p}$$

и характеристическое уравнение имеет вид:

$$T^2\lambda^3 + (2\xi T + k_{\text{Д}})\lambda^2 + (1 + k_{\text{П}})\lambda + k_{\text{И}} = 0.$$

Определитель Гурвица 2-го порядка

$$\Delta_2 = (2\xi T + k_{\text{Д}})(1 + k_{\text{П}}) - T^2k_{\text{И}}$$

выбором $k_{\text{Д}}$ всегда можно сделать положительным.

Таким образом, введение в закон управления интегрирующего члена может сделать устойчивую систему неустойчивой, а введение дифференцирующего члена может сделать неустойчивую систему устойчивой.

Для коэффициентов ошибки имеем:

$$C_{g0} = W_{eg}(0) = 0, \quad C_{g1} = \left.\frac{W_{eg}(p)}{p}\right|_{p=0} = \frac{1}{k_{\text{И}}},$$

$$C_{f0} = W_{ef}(0) = 0, \quad C_{f1} = \left.\frac{W_{ef}(p)}{p}\right|_{p=0} = -\frac{1}{k_{\text{И}}}.$$

Все основные выводы о влиянии дифференцирующего и интегрирующего членов на качество системы, полученные на основе рассмотрения ПИ-закона и ПД-закона управления, сохранятся и при рассмотрении ПИД-закона.

Итак, основные выводы таковы:

1) введение в закон управления интегрирующего члена делает систему астатической и улучшает качество системы в установившемся режиме, но оказывает дестабилизирующее влияние (т. е. может сделать систему неустойчивой) и ухудшает качество системы в переходном режиме;

2) введение в закон управления дифференцирующего члена оказывает стабилизирующее влияние (может сделать неустойчивую систему устойчивой) и улучшает качество системы в переходном режиме, не оказывая влияния на качество системы в установившемся режиме.

Список литературы

1. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления. - Спб.: Наука, 2000.
2. Анхимюк В.Л., Михеев Н.Н., Опейко О.Ф. Теория автоматического управления. - Мн.: Высшая школа, 2000.
3. Бутковский А.Г., Фельдбаум А.А. Методы теории автоматического управления. - М.: Наука, 1971.
4. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления: Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. - М.: Энергия, 1980.
5. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.1. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
6. Колобов А.М. Ибранные главы высшей математики. Часть 1. - Мн.: Высшая школа, 1965.
7. Никулин Е.А. Основы теории автоматического управления: Учебное пособие.- Спб.: БХВ, 2004.
8. Топчеев Ю.И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования: Учебное пособие для втузов. - М.: Машиностроение, 1989.

Никитенко Евгений Витальевич
Айрих Ирина Александровна

СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Учебное пособие для студентов направления "Информатика и вычислительная техника"

Редактор Е.Ф. Изотова

Подписано к печати 25.01.16. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 4,56. Тираж 50 экз. Зак. № 161192. Рег. № 127

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института.
658207, г. Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.